HASSANE SQUALLI

UNE RECONCEPTUALISATION DU CURRICULUM D'ALGÈBRE DANS L'ÉDUCATION DE BASE

Thèse
présentée
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

Novembre 2000

© Hassane Squalli, 2000

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-55825-8

Canada

À ma femme Naïma
Et mes deux filles : Khawla et Zineb

Remerciements

Dans la concrétisation de ce projet certaines personnes ont contribué directement ou indirectement, chacune à sa façon, je tiens à les remercier ici.

J'offre mes sincères remerciements à Monsieur Claude Gaulin, qui a dirigé cette thèse avec un intérêt et une abnégation non discontinués; les longues et multiples discussions qu'on a eu ensemble ont été pour moi une source inépuisable d'inspiration; son apport à cette thèse reste considérable.

Je remercie chaleureusement Mme Nadine Bednarz d'avoir bien voulu agir comme examinatrice externe et M. Frédéric Gourdeau d'avoir fait partie des membres du jury. Je tiens à remercier Mme Roberta Mura d'avoir fait la prélecture de la thèse et dont les recommandations pertinentes ont permis d'en améliorer grandement la version finale.

Je remercie mes ami(e)s étudiants et étudiantes de l'ACCESE pour les échanges scientifiques, culturels et sociaux qui ont contribué à mon enrichissement personnel et académique.

Je remercie également mes compatriotes de GIREM et d'ASMA pour les bon moments passés ensembles et les merveilleux projets que nous avons réalisées ainsi que ceux dont on a seulement rêvé. Je remercie aussi chaleureusement, tous mes ami(e)s, qui ont constitué notre seconde famille ici au Québec, qui ont été un soutien moral inestimable.

Je ne saurai remercier suffisamment ma femme Naïma, mes filles Khawla et Zineb de m'avoir soutenu pendant toutes ces longues années qu'a duré ce travail.

Enfin je remercie mes parents pour m'avoir insufflé le goût d'apprendre et la persévérance dans le travail, et mes frères et sœurs pour leurs encouragements. Je remercie aussi mes beaux-parents pour le soutien et le réconfort qu'ils m'ont apporté.

Résumé court

Notre recherche, de nature fondamentale, vise à mener une étude approfondie en vue de reconceptualiser le curriculum d'algèbre pour tous au niveau de l'éducation de base. À partir d'une analyse du développement historique de l'algèbre et de considérations d'ordre mathématique et épistémologique, nous proposons un modèle (M.I.A.P.A.) intégrant trois aspects principaux de "l'algèbre" et quatre habiletés intellectuelles caractéristiques de "la pensée algébrique". Après avoir examiné quatre approches didactiques de l'algèbre compatibles avec notre modèle, nous en arrivons ensuite à recommander d'utiliser dans l'enseignement une approche didactique mixte qui intègre les précédentes et dont la pertinence est confirmée par une analyse critique d'approches utilisées traditionnellement ou proposées récemment. Finalement, nous formulons huit principes généraux que tout curriculum d'algèbre pour tous devrait satisfaire, accompagnés d'indicateurs pour évaluer ou construire de tels curriculums.

Résumé long

Notre recherche, de nature fondamentale, vise à mener une étude approfondie en vue de reconceptualiser le curriculum de l'algèbre pour tous au niveau de l'éducation de base, et à contribuer ainsi à la rénovation de l'enseignement de cette matière qui est généralement perçue par les élèves comme étant aride et très formelle. Plus précisément, elle a pour but de répondre aux deux questions de recherche suivantes :

1. *Quelle approche didactique utiliser dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base ?*
2. *Sur quels principes peut-on se baser pour évaluer ou construire un curriculum d'algèbre pour tous véritablement adapté à l'éducation de base ?*

Avant de répondre à ces deux questions, nous construisons un cadre conceptuel concernant "l'algèbre" et "la pensée algébrique" en partant d'une analyse du développement historique de l'algèbre, dont nous proposons un découpage en huit grandes étapes. À partir des résultats de cette analyse et de considérations d'ordre mathématique et épistémologique, nous distinguons trois aspects principaux de l'algèbre, ainsi que quatre habiletés intellectuelles caractéristiques de la pensée algébrique. Nous proposons ensuite un modèle original, appelé M.I.A.P.A., qui présente l'algèbre et la pensée algébrique de manière complémentaire et intégrée.

Nous présentons ensuite quatre approches didactiques de l'algèbre compatibles avec notre modèle : l'approche langage, l'approche structures, l'approche modélisation et l'approche fonction. En réponse à notre première question de recherche, nous recommandons d'utiliser dans l'enseignement une approche mixte intégrant les précédentes. Une analyse critique d'approches didactiques utilisées traditionnellement ou proposées récemment confirme la pertinence de notre réponse.

En réponse à notre deuxième question de recherche, nous formulons huit principes généraux que tout curriculum d'algèbre pour tous au niveau de l'éducation de base devrait satisfaire, ainsi que huit indicateurs correspondants, pouvant aider aussi bien à évaluer des curriculums déjà existants qu'à en développer de nouveaux.

Table des matières

REMERCIEMENTS I

RÉSUMÉ COURT III

RÉSUMÉ LONG IV

TABLE DES MATIÈRES VI

LISTE DES FIGURES XI

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION ET OBJECTIF DE LA THÈSE 1

1.1 INTRODUCTION 2

1.2 SUJET DE LA THÈSE 2

1.3 RAISONS DU CHOIX DE CE SUJET DE RECHERCHE 3

1.4 OBJECTIF DE LA THÈSE 5

1.5 STRUCTURE ET GRANDES ÉTAPES DE LA THÈSE 8

1ÈRE ÉTAPE
CADRE CONCEPTUEL

CHAPITRE 2 : GRANDES ÉTAPES DE L'ÉVOLUTION HISTORIQUE DE L'ALGÈBRE 10

2.1 INTRODUCTION 11

2.2 ÉTAPES DE L'ÉVOLUTION DE L'ALGÈBRE SELON NESSELMAN 11

2.3 ÉTAPES DE L'ÉVOLUTION DE L'ALGÈBRE SELON PIAGET ET GARCIA 13

2.4 LE PROBLÈME DES ORIGINES DE L'ALGÈBRE 14

2.5 HUIT GRANDES ÉTAPES RETENUES DU DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE DE L'ALGÈBRE 17

2.5.1 L'idée de l'algèbre selon al-Khawarizmi 17
2.5.2 Les algébristes arithméticiens arabes ou l'algèbre comme arithmétique des inconnues 31
2.5.3 Les algébristes géomètres arabes ou l'algèbre comme théorie des équations algébriques 35
2.5.4 Cardan et l'application du calcul algébrique à de nouveaux domaines de nombres 44
2.5.5 Viète et le développement du symbolisme algébrique 47
2.5.6 Hamilton et l'extension du calcul algébrique à de nouveaux domaines de calcul 50
2.5.7 Galois et l'introduction des structures algébriques 52
2.5.8 L'apparition de l'algèbre moderne 55

2.6 CONCLUSION 56

CHAPITRE 3 : UN MODÈLE INTÉGRATEUR DE L'ALGÈBRE ET DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE 59

3.1 INTRODUCTION 60

3.2 IMPORTANCE D'INSISTER À LA FOIS SUR L'ALGÈBRE ET SUR LA PENSÉE ALGÉBRIQUE 60

3.3 PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES DE L'ALGÈBRE 62

3.3.1 Précisions sur la terminologie utilisée 63
3.3.1.1 Les notions d'opération, de système algébrique et d'expression algébrique 63
3.3.1.2 Les notions d'espace de calcul algébrique et d'équations algébriques 66
3.3.1.3 Les notions de structure algébrique et de structure de situation 73
3.3.2. Construction et interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques 75
3.3.3 Manipulation d'expressions algébriques selon des règles prédéfinies 81
3.3.4 Élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.) 85
3.3.5 Conclusion 87

3.4 PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE 88

3.4.1 Précisions sur la terminologie utilisée 90
3.4.1.1 L'abstraction en mathématiques 90
3.4.1.2 La généralisation en mathématiques 92
3.4.2 Habileté à penser analytiquement 93
3.4.3 Habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques 94

3.4.3 Habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles syntaxiques prédéfinies 100
3.4.4 Habileté à abstraire et à généraliser des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques 107
3.4.5 Conclusion 113

3.5 MODÈLE INTÉGRATEUR DE L'ALGÈBRE ET DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE 114

3.6 COMPARAISON DU MODÈLE THÉORIQUE PROPOSÉ AVEC LES POINTS DE VUE D'AUTRES AUTEURS 116

3.6.1 La caractérisation explicite de la pensée algébrique de Romulo Lins 116
3.6.2 La proposition du groupe de travail sur l'algèbre (AWG) du NCTM 118
3.6.3 La proposition de Jim Kaput 122

3.7 CONCLUSION 126

CHAPITRE 4 : L'ALGÈBRE ET LA PENSÉE ALGÉBRIQUE EN TANT QUE COMPOSANTES INCONTOURNABLES DE L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE DE BASE 128

4.1 INTRODUCTION 129

4.2 L'ÉDUCATION DE BASE À L'ÉCOLE 129

4.3 OBJECTIFS VISÉS DANS L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE DE BASE 132

4.4 L'ALGÈBRE ET LA PENSÉE ALGÉBRIQUE EN TANT QUE COMPOSANTES INCONTOURNABLES DE L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE DE BASE 139

2ÈME ÉTAPE

FORMULATION DE QUESTIONS DE RECHERCHE

CHAPITRE 5 : OBJECTIF, QUESTIONS ET MÉTHODE DE RECHERCHE 144

5.1 RETOUR SUR L'OBJECTIF VISÉ 145

5.2 LA NOTION D'APPROCHE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE 145

5.3 LA NOTION DE CURRICULUM D'ALGÈBRE POUR TOUS 146

5.4 QUESTIONS ET MÉTHODE DE RECHERCHE 150

5.4.1 Première question de recherche et moyens retenus pour y répondre 150
5.4.2 Deuxième question de recherche et moyens retenus pour y répondre 150

3ÈME ÉTAPE
RÉPONSES AUX QUESTIONS DE RECHERCHE

CHAPITRE 6 : LES APPROCHES DIDACTIQUES DE L'ALGÈBRE DANS L'ÉDUCATION DE BASE 153

6.1 INTRODUCTION 154

6.2 APPROCHES DIDACTIQUES POSSIBLES DE L'ALGÈBRE DANS L'ÉDUCATION DE BASE 154

6.2.1 L'approche «langage» 155
6.2.2 L'approche «structures» 161
6.2.3 L'approche «modélisation» 165
6.2.4 L'approche «fonction» 168
6.2.5 Proposition d'une approche didactique «mixte» de l'algèbre dans l'éducation de base 171

6.3 QUELQUES APPROCHES DIDACTIQUES UTILISÉES TRADITIONNELLEMENT DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE 175

6.3.1 L'approche «arithmétique généralisée» 175
6.3.2 L'approche basée sur les extensions successives des systèmes de nombres 181
6.3.3 Exemples traditionnels de l'approche «langage» 184

6.4 QUELQUES APPROCHES DIDACTIQUES PROPOSÉES RÉCEMMENT POUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE DANS L'ÉCOLE DE BASE 188

6.4.1 Approches proposées dans un ouvrage collectif récent 188
6.4.1.1 La perspective «généralisation» dans l'introduction de l'algèbre 188
6.4.1.2 La perspective «résolution de problèmes» dans l'introduction de l'algèbre 190
6.4.1.3 La perspective fonctionnelle dans l'introduction de l'algèbre 199
6.4.1.4 La perspective «modélisation» dans l'introduction de l'algèbre 216
6.4.2 Une approche proposée par Yves Chevallard 217
6.4.3 L'approche multi-intégrée proposée par James Kaput 220
6.4.4 Propositions du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 221
6.4.4.1 Une approche multi-intégrée proposée par le groupe AWG 222
6.4.4.2 L'algèbre dans les «Principles and Standards for School Mathematics» de 2000, du NCTM 223

6.5 DISCUSSION ET CONCLUSION 232

CHAPITRE 7 : PRINCIPES À LA BASE D'UN CURRICULUM RENOUVELÉ D'ALGÈBRE POUR L'ÉDUCATION DE BASE 234

7.1 INTRODUCTION 235

7.2 RECHERCHE D'INDICATEURS 235

7.3 PRINCIPES GÉNÉRAUX À RESPECTER PAR UN CURRICULUM D'ALGÈBRE POUR TOUS 237

7.3.1 Premier principe général 237
7.3.2 Deuxième principe général 243
7.3.3 Troisième principe général 245
7.3.4 Quatrième principe général 247
7.3.5 Cinquième principe général 251
7.3.6 Sixième principe général 259
7.3.7 Septième principe général 262
7.3.8 Huitième principe général 265

7.4 ÉLABORATION OU ÉVALUATION D'UN CURRICULUM D'ALGÈBRE DANS L'ÉDUCATION DE BASE À L'AIDE DES PRINCIPES GÉNÉRAUX ET DES INDICATEURS 268

7.5 CONCLUSION 270

CHAPITRE 8 : SYNTHÈSE ET CONCLUSIONS GÉNÉRALES 273

8.1 SYNTHÈSE 274

8.2 CONCLUSIONS GÉNÉRALES 286

8.3 LIMITES DE LA RECHERCHE ET MISES EN GARDE 288

8.4 PISTES DE RECHERCHE ET DE DÉVELOPPEMENTS FUTURS 290

BIBLIOGRAPHIE 292

ANNEXE A 306

Liste des figures

FIGURE 2.1 : JUSTIFICATION GÉOMÉTRIQUE D'AL-KHAWARIZMI 25
FIGURE 2.2 : SYSTÈME DE NOTATION UTILISÉ PAR IBN QUNFUD 43
FIGURE 3.1 : DIFFÉRENTES FAÇONS DE REPRÉSENTER UNE OPÉRATION 64
FIGURE 3.2 : MODÉLISATION MATHÉMATIQUE 78
FIGURE 3.3 : RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE D'UN PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE 80
FIGURE 3.4 : TABLES DES GROUPES D'ORDRE 4 108
FIGURE 3.5 : FACE ALGÈBRE DU M.I.A.P.A 115
FIGURE 3.6 : FACE PENSÉE ALGÉBRIQUE DU M.I.A.P.A 115
FIGURE 3.7 : A FRAMEWORK FOR CONSTRUCTING A VISION OF ALGEBRA 119
FIGURE 5.1 : MODÈLE DU CURRICULUM D'ALGÈBRE POUR TOUS ADAPTÉ DU MODÈLE D'ERAUT (1990) 147
FIGURE 6.1 : APPROCHE DIDACTIQUE MIXTE DE L'ALGÈBRE 172
FIGURE 6.2 :STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN PROBLÈME 191
FIGURE 6.3: RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE DIFFÉRENTES STRUCTURES 193
FIGURE 6.4 : PROBLÈME ARITHMÉTIQUE VS ALGÉBRIQUE 195
FIGURE 6.5. : RÉSOLUTION PAR ESSAIS SUCCESSIFS 207
FIGURE 6.6 : PROGRAMME ÉLABORÉ PAR UN ÉLÈVE AVEC CARAPACE 211
FIGURE 7.1 : CURRICULUM MULTI-INTÉGRÉ D'ALGÈBRE POUR TOUS 271

Chapitre 1

Introduction et objectif de la thèse

1.1 INTRODUCTION

Dans ce premier chapitre, nous commençons par présenter le sujet de la thèse et indiquer les raisons qui nous ont poussé à s'intéresser à ce thème d'étude. Ensuite, nous présentons l'objectif de la thèse en expliquant pourquoi nous avons retenu un tel objectif et en clarifiant le postulat de travail que nous adoptons. Enfin, nous annonçons les grandes étapes de la thèse.

1.2 SUJET DE LA THÈSE

La présente thèse porte sur l'enseignement de l'algèbre à l'école, plus précisément sur la rénovation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base.

Dans la plupart des pays, l'algèbre occupe une place centrale dans les mathématiques du secondaire. Elle constitue en quelque sorte un filtre pour l'accès à des études post-secondaires, puisqu'une certaine dose de connaissances en algèbre s'avère indispensable pour poursuivre des études dans plusieurs disciplines. La démocratisation de l'enseignement et le prolongement de la période de l'éducation de base qui s'en est suivi, ont fait que l'algèbre fait partie maintenant du curriculum de mathématiques pour tous les élèves et ce dans plusieurs pays du monde. Usiskin (1994) souligne que ce phénomène est relativement récent puisqu'au siècle dernier, l'enseignement de l'algèbre – comme celui de la géométrie – était réservé à un petit pourcentage de la population, même dans les sociétés les plus développées.

Cependant, l'algèbre est réputée être, depuis longtemps, un sujet scolaire aride et pour l'apprentissage duquel beaucoup d'élèves éprouvent de grandes difficultés (voir par exemple Rosnick & Clement, 1980; Küchemann, 1981; Wagner, Rachlin & Jensen, 1984; Booth, 1984). Ce fait devient encore plus évident lorsqu'il s'agit d'enseigner l'algèbre à *tous* les élèves.

Dans l'apprentissage de l'algèbre, les élèves recourent, le plus souvent, à la mémorisation de règles et de procédures, et ils en arrivent à croire que ces activités constituent l'essence de l'algèbre (Kieran, 1992). Pour un grand nombre d'entre eux, l'algèbre est une source de grande confusion et d'attitudes négatives (Booth, 1988); ce monde leur apparaît clos, abstrait, purement instrumental et mécanique. Ce phénomène est si répandu qu'on peut même y voir un phénomène culturel, à tel point que dans le Petit Robert, le mot algèbre est devenu synonyme, au sens figuré, d'une *chose difficile à comprendre,* d'un *domaine inaccessible à l'esprit.*

Les curriculums actuels d'algèbre à l'école ont fait et continuent de faire l'objet de nombreuses critiques. Ainsi, en 1979, *Her Majesty's Inspector* pour les pays d'Angleterre et de Galles concluait dans son rapport:

> The teaching of traditional algebra has long presented difficulties in school and it is a branch of mathematics, which remains a mystery to many adults. (Cité dans Lee, 1997, p. 8)

De même, Jim Kaput affirmait récemment à propos des curriculums d'algèbre en vigueur aux États-Unis d'Amérique:

> School algebra in the U.S. is institutionalized as two or more highly redundant courses, isolated from other subject matter, introduced abruptly to post-pubescent students, and often repeated at great cost as remedial mathematics at the secondary level. Their content has evolved historically into the manipulation of strings of alphanumeric characters guided by various syntactical principles and conventions, occasionally interrupted by "applications" in the form of short problems presented in brief chunks of highly stylized text. All these are carefully organized into small categories of very similar activities that are rehearsed by category before introduction of the next category, when the process is repeated. The net effect is a tragic alienation from mathematics for those who survive this filter and an even more tragic loss of life-opportunity for those who don't. (Kaput, 1995, p. 71)

1.3 RAISONS DU CHOIX DE CE SUJET DE RECHERCHE

Deux raisons principales justifient notre choix de ce sujet de recherche.

La première est d'ordre personnel. La problématique de l'apprentissage et de l'enseignement de l'algèbre à l'école nous a toujours beaucoup intéressé depuis que nous avons travaillé à la formation des maîtres de mathématiques au Maroc. En effet, dans le cadre de la supervision des stages pratiques des futurs maîtres, nous avons été amené régulièrement à observer des classes de mathématiques où nous avons été souvent témoin des sérieuses difficultés que beaucoup d'élèves éprouvaient dans l'apprentissage de l'algèbre. Au fil des années, un fait est devenu évident à nos yeux : l'enseignement de l'algèbre continue à poser des problèmes didactiques énormes au Maroc – tout comme dans la grande majorité des pays apparemment – tout particulièrement lorsqu'il est destiné à tous les élèves.

En examinant de plus près l'évolution des programmes marocains de mathématiques durant les dernières décennies, nous avons constaté que l'enseignement de l'algèbre a toujours été basé essentiellement sur les mêmes thèmes d'étude : calcul littéral, manipulation d'expressions algébriques, multiplication et factorisation de polynômes, équations et inéquations. L'apprentissage des techniques du calcul algébrique occupe la majeure partie du temps alloué à l'enseignement de l'algèbre, et la manipulation des x et des y ne tend vers aucun but précis autre que la pratique du calcul algébrique lui-même. L'algèbre apparaît aux élèves comme une mécanique froide et abstraite qu'il faut maîtriser sous prétexte qu'elle leur sera utile plus tard.

C'est à partir de tels constats que nous avons été amené à nous intéresser tout particulièrement à l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base. Nous voudrions comprendre pourquoi l'enseignement de l'algèbre à l'école est un échec et comment il faudrait réformer les curriculums scolaires actuels d'algèbre pour tous et préparer les maîtres en conséquence.

La deuxième raison qui nous a poussé à choisir ce sujet de recherche réside dans le fait qu'il s'agit d'un thème d'actualité dans la communauté des didacticiens[1] des mathématiques. Leur insatisfaction face à l'état de l'enseignement de l'algèbre à l'école et surtout les changements survenus dans les conditions de l'enseignement des mathématiques à l'école – notamment la démocratisation de l'enseignement et la possibilité d'intégration d'outils technologiques dans l'enseignement des mathématiques – ont conduits les didacticiens des mathématiques, depuis la fin des années 1980, à envisager sérieusement la réforme des curriculums scolaires actuels d'algèbre. C'est ainsi que durant la dernière décennie, on a vu se multiplier les travaux de recherche à ce sujet : Wheeler (1989); Lins (1992); Kieran (1992); Kaput (1995), etc. De nombreux forums scientifiques ont aussi été organisés pour en discuter, notamment à l'occasion des récents Congrès internationaux sur l'enseignement des mathématiques (ICME) et des rencontres des groupes PME et PME-NA. Également, de nouvelles propositions curriculaires ont été mises de l'avant par des organismes tels que le National Council of Teachers of Mathematics (1994; 1998), et par des chercheurs comme Kieran (1996), Kaput (1998) et les collaborateurs de l'ouvrage publié sous la direction de Bednarz, Kieran et Lee (1996).

1.4 OBJECTIF DE LA THÈSE

Dans l'enseignement traditionnel de l'algèbre, celle-ci est vue comme une « arithmétique généralisée »; elle traite des quantités et des opérations permises sur ces quantités, et ses règles sont dictées par les propriétés bien connues de l'arithmétique quantitative (Pycior, 1984). De nombreuses recherches ont été menées sur les ressemblances et les différences qui existent entre l'arithmétique et l'algèbre, en vue de mieux comprendre comment l'enseignement de l'algèbre peut s'appuyer sur l'expérience qu'ont les élèves en arithmétique. L'article synthèse de Kieran (1992) fait état de nombreux travaux à ce sujet.

---

[1] Dans tout le document, le masculin est utilisé strictement pour alléger le texte sans exclure le genre

Mais le passage pour les élèves d'un stade arithmétique à un stade algébrique est loin d'être facile à réaliser et pose problème (Vergnaud, Cortes et Favres-Artigue, 1988; Kieran, 1992, Rojano, 1996). De plus, il apparaît que les longs apprentissages qu'ont réalisés les élèves en arithmétique peuvent venir faire obstacle à leur apprentissage de l'algèbre (Booth, 1984). De nombreuses recherches empiriques ont montré qu'effectivement, au lieu de stratégies algébriques de résolution de problèmes, un grand nombre d'élèves préfèrent utiliser des stratégies arithmétiques. Par exemple, lorsqu'il s'agit de résoudre une équation, plusieurs ont de la difficulté à opérer sur l'inconnue et utilisent plutôt la méthode par essais et erreurs, qui est souvent efficace dans les problèmes scolaires. Filloy et Rojano considèrent que dans de tels cas il existe une coupure didactique le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique chez l'élève (Filloy et Rojano, 1989).

Depuis une décennie, un grand nombre de personnes oeuvrant en éducation mathématique insistent sur la nécessité de réformer en profondeur les curriculums actuels d'algèbre de l'école, notamment pour tenir compte du nouveau contexte de l'enseignement des mathématiques (et de l'algèbre en particulier) qui a été évoqué précédemment. Selon eux, il s'agit non pas simplement de rafraîchir ces curriculums en s'arrêtant sur des détails (par exemple, faut-il justifier de plusieurs manières différentes la formule donnant les solutions d'une équation du second degré ?) ou de dresser une nouvelle liste de contenus algébriques à enseigner ou d'habiletés cognitives à faire acquérir aux élèves, mais plutôt de reconceptualiser le curriculum d'algèbre à l'école. Ainsi, le groupe du *National Council of Teachers of Mathematics* chargé de proposer une nouvelle vision de l'algèbre à l'école affirme dans son rapport :

> As mathematics becomes more interdisciplinary and connected, as technology redefines the need for certain skills, and as the world's complexities demand reasoning and symbol sense, algebra needs reconceptualization. Tomorrow's algebra curriculum should represent a significant departure from what now commonly exists (NCTM, 1994, p. 5).

---

féminin.

Usiskin (1985) compare le mouvement de réforme en algèbre qui est en train de s'amorcer à celui des mathématiques modernes; il n'hésite pas à parler de *révolution*, plutôt que d'évolution, et il affirme que le curriculum d'algèbre de demain sera certainement très différent de celui d'aujourd'hui.

Par ailleurs, dans la communauté didactique, on recherche une nouvelle vision de l'algèbre plus large que celle d'une arithmétique généralisée. Cependant, les points de vue des didacticiens à ce sujet sont fort divergents. D'abord parce qu'ils donnent des significations bien différentes au terme «algèbre» et qu'en conséquence ils ne s'entendent pas sur ce qu'on devrait enseigner en algèbre à l'école. Ensuite, parce qu'à présent on a de plus en plus tendance à insister sur le développement de la pensée algébrique chez les élèves, au lieu de mettre l'accent exclusivement, comme on le faisait traditionnellement, sur l'enseignement de connaissances et d'habiletés techniques en algèbre. Or, là encore, les points de vue concernant *la pensée algébrique* sont assez divergents.

Dans le cadre de sa recherche de doctorat, Lee (1997) a demandé ce qu'est l'algèbre à des enseignants des mathématiques, des didacticiens et des mathématiciens. En analysant des entrevues, des écrits et des échanges dans le cadre d'un forum électronique de discussion sur l'algèbre, elle a mis en évidence cinq catégories de réponses reflétant, selon elle, cinq métaphores différentes de l'algèbre : l'algèbre en tant que *langage*, l'algèbre en tant que *manière de penser*, l'algèbre en tant que *matière scolaire*, l'algèbre en tant qu'*outil* (ou ensemble d'outils); l'algèbre en tant qu'*activité*, et l'algèbre en tant qu'*arithmétique généralisée*. Elle a montré aussi comment dans la communauté des didacticiens de l'algèbre, il n'existe pas encore une cohérence de points de vue à ce sujet.

Compte tenu de tout ce qui précède, nous avons retenu l'objectif suivant pour notre thèse :

Mener une étude approfondie visant à reconceptualiser le curriculum d'algèbre pour tous dans l'éducation de base.

Cet objectif sera précisé plus tard. En attendant, nous voudrions insister sur un point très important : au lieu de partir des curriculums actuels d'algèbre et de chercher à les améliorer sous différents rapports, nous nous proposons dans ce travail de *faire provisoirement table rase de la réalité actuelle* et de mener d'abord une réflexion en profondeur sur les aspects mathématique, épistémologique et didactique de l'algèbre.

1.5 STRUCTURE ET GRANDES ÉTAPES DE LA THÈSE

Cette thèse se déroulera en trois grandes étapes.

La première étape consistera à élaborer un CADRE CONCEPTUEL concernant les notions d'algèbre, de pensée algébrique, d'éducation de base et de curriculum. Comme nous ne voulons pas partir d'une signification *a priori* de l'algèbre, nous commencerons, dans le chapitre 2, par étudier le développement historique de l'algèbre. Dans le chapitre 3, après avoir précisé la terminologie des notions que nous allons utiliser, nous présenterons un modèle résumant les aspects importants de l'algèbre et de la pensée algébrique. Dans le chapitre 4, nous préciserons la notion d'éducation de base, nous présenterons les objectifs de l'éducation mathématique de base et nous soutiendrons que l'algèbre et la pensée algébrique sont des composantes incontournables de cette dernière.

Dans une deuxième étape du travail, il sera question de la FORMULATION DE QUESTIONS DE RECHERCHE. Dans le chapitre 5, nous préciserons l'objectif de la thèse en formulant deux questions de recherche et nous clarifierons la méthode de recherche adoptée.

La troisième étape du travail s'intitule RÉPONSES AUX QUESTIONS DE RECHERCHE. Elle fera l'objet des chapitres 6 et 7.

Enfin, une synthèse et des conclusions générales du travail seront présentées dans le chapitre 8 de la thèse.

CADRE CONCEPTUEL

Chapitre 2

Grandes étapes de l'évolution historique de l'algèbre

2.1 INTRODUCTION

Pour aller dans le sens du postulat de travail annoncé en 1.5, nous entamons la présentation du cadre conceptuel de notre thèse par une réflexion sur les grandes étapes de l'évolution de l'algèbre. Pour ce faire, nous ne nous donnons au départ aucune signification précise au mot «algèbre», en nous contentons de faire référence à un champ mathématique dont les origines historiques sont lointaines et dans lequel œuvrent actuellement de nombreux chercheurs.

L'analyse de l'évolution historique de l'algèbre, qui fait l'objet du présent chapitre, constitue la première piste que nous explorerons pour élaborer notre cadre conceptuel de référence concernant l'algèbre et la pensée algébrique. Le but poursuivi ici n'est pas de retracer une histoire de l'algèbre comme le ferait un historien, mais d'en dégager les éléments nous éclairant sur les significations de l'algèbre à certaines étapes de son histoire.

Nous commençons par présenter deux interprétations de l'évolution historique de l'algèbre : la première est rapportée par Nesselman, la seconde est proposée par Piaget et Garcia. Ensuite, nous relatons le délicat problème de fixer les origines historiques de l'algèbre. Enfin, nous présentons les huit grandes étapes de l'histoire de l'algèbre que nous avons retenues pour les besoins de notre travail.

2.2 ÉTAPES DE L'ÉVOLUTION DE L'ALGÈBRE SELON NESSELMAN

En didactique de l'algèbre, il arrive souvent que l'on se réfère au découpage de l'évolution historique de l'algèbre, dû à Cajori (1859-1930) mais popularisé par Nesselman, en trois étapes principales: *l'algèbre rhétorique*, d'avant Diophante d'Alexandrie (IIIe s.), où l'expression des problèmes et de leur solution se fait au moyen de phrases, sans qu'intervienne aucune notation; *l'algèbre syncopée*, où quelques

abréviations apparaissent, (par exemple dans le livre *Arithmétiques* de Diophante); *l'algèbre symbolique* de Viète (1540-1603), où l'on se dégage complètement des mots et on utilise des lettres pour représenter les quantités connues ou inconnues et des signes pour les opérations (Baruk, 1992, pp. 71-72).

Ces trois stades sont caractérisés ainsi :

> (1) The first stage Nesselman represents by the name Rhetorical Algebra or "reckoning by complete words." The characteristic of this stage is the absolute want of all symbols, the whole of the calculation being carried on by means of complete words, and forming in fact continuous prose ...
> (2) The second stage Nesselman proposes to call the Syncopated Algebra. This stage is essentially rhetorical, and therein like the first in its treatment of the question; but we now find for often-recurring operations and quantities, certain abbreviational symbols ...
> (3) To the third stage Nesselman gives the name Symbolic Algebra, which use a complete system of notations by signs having no visible connection with the words or things they represent. (Heath, 1964, p. 49; lu dans Lins, 1992, p. 37)

Cette classification reflète un aspect particulier de l'évolution de l'algèbre, à savoir le symbolisme algébrique. Elle ne peut suffire, nous semble-t-il, à rendre pleinement compte de la nature de l'algèbre et de la pensée algébrique. De leur côté, Bednarz, Janvier, Mary et Lepage (1992) posent la question : sans nier le rôle du symbolisme algébrique, peut-on dire que cette évolution caractérise bien l'émergence ou le développement d'une pensée algébrique ? Elles font remarquer ensuite :

> L'histoire des mathématiques nous montre que le développement de l'algèbre a commencé bien avant que les quantités inconnues soient représentées par un symbole. Les quelques recherches conduites auprès d'élèves nous montrent par ailleurs que beaucoup d'entre eux, de l'école secondaire jusqu'à l'université, résolvent davantage les problèmes algébriques dans un style «abrégé» (langage naturel «syncopé») que symbolique. (Bednarz, Janvier, Mary et Lepage, 1992, p. 19)

Confondre l'histoire de l'algèbre avec celle de son symbolisme pourrait conduire à des conclusions erronées. Nous reviendrons sur ce point à la fin du chapitre, après la présentation des étapes principales de l'histoire de l'algèbre que nous avons retenues.

2.3 ÉTAPES DE L'ÉVOLUTION DE L'ALGÈBRE SELON PIAGET ET GARCIA

Tentant de montrer l'existence d'un parallélisme entre la *phylogenèse* (genèse historique) et la *psychogenèse* (genèse psychologique) de l'algèbre, Piaget et Garcia (1983) proposent une autre interprétation de l'évolution historique de l'algèbre. Reprenant à leur compte une analyse de Boutros, ils caractérisent cette évolution par trois grandes étapes, nommées respectivement étape *intraopérationnelle*, étape *interopérationnelle* et étape *transopérationnelle*, dont les frontières sont marquées par les prises de conscience des opérations d'abord et des structures ensuite. Dans cette analyse, Piaget et Garcia mettent en évidence le rôle primordial que joue le concept d'«opération» en algèbre. Ils caractérisent ces trois étapes ainsi:

> 1. Les étapes intraopérationnelles sont caractérisées par des liaisons intraopérationnelles qui se présentent sous des formes isolables, comportant certes, comme leur nom l'indique, des articulations internes, mais ne se composant pas entre elles, et sans des transformations de l'une à l'autre qui supposent l'existence d'invariants.
> 2. Les étapes interopérationnelles sont caractérisées par des correspondances et des transformations entre les formes isolables de l'étape antérieure, avec de plus les invariants que de telles transformations exigent.
> 3. Les étapes transopérationnelles sont caractérisées par la construction de structures dont les relations internes correspondent aux transformations interopérationnelles. (Piaget et Gracia, 1983, p. 164)

Se basant sur un livre d'histoire des mathématiques de Jacob Klein[2] (1968), Piaget et Garcia interprètent le développement historique de l'algèbre de la manière suivante.

Pendant une première période, extrêmement longue, il ne s'agit que de la recherche de solutions à des équations spécifiques. La méthode est purement empirique et consiste à procéder par tâtonnements. Chaque équation est l'objet d'un traitement particulier. Selon Piaget et Garcia, il s'agit là d'une étape intraopérationnelle du développement de l'algèbre.

---

[2] Klein, J. (1968) *Greek mathematical thought and the origin of algebra.* Cambridge, Mass.: *MIT Press.*

Ce n'est qu'au XVIIème siècle, avancent-ils, qu'on arrive à chercher des méthodes plus générales et, surtout, à poser le problème général de l'existence ou de la non-existence de solutions. Les transformations d'équations permettant de réduire une forme non résolue à une forme résoluble dominent largement les recherches. Ici, c'est l'analyse qui va jouer un rôle fondamental. Lagrange et Gauss sont les grandes figures de cette période, laquelle constitue du point de vue de Piaget et Garcia, une période interopérationnelle de l'évolution de l'algèbre.

Avec Galois et le développement de la théorie des groupes aboutit l'histoire de la résolution des équations et commence la prédominance des structures algébriques. Selon Piaget et Garcia, c'est le début de l'étape transopérationnelle du développement de l'algèbre.

Nous avons présenté l'interprétation de l'évolution historique de l'algèbre de Piaget et Garcia, parce qu'elle a le mérite de bien mettre en évidence le caractère essentiel que joue l'opération, dans le développement et l'appréhension de l'algèbre. Nous allons exploiter plus tard cette observation mais nous n'allons pas nous baser sur l'analyse de Piaget et Garcia.

2.4 LE PROBLÈME DES ORIGINES DE L'ALGÈBRE

Les origines historiques de l'algèbre ne sont pas précises. Elles sont en effet tributaires de la signification que l'on donne au mot «algèbre». À ce propos, dans son ouvrage classique sur l'histoire des mathématiques, Smith écrit:

> If by algebra we mean the science which allows us to solve the equations $ax^2 + bx + c = 0$, expressed in these symbols, then the history begins in the 17th century; if we remove the restrictions as to those particular signs, and allow for other and less convenient symbols, we might properly begin the history in the 3d century; if we allow for the solution of the above equation by geometric methods, without algebraic symbols of any kind, we might say that algebra begins with the Alexandrian School or a little earlier; and if we say that we should now solve by algebra (even though it was at first solved by mere guessing or by some cumbersome arithmetic process),

> then the science was known about 1800 BC, and probably still earlier. (Smith, 1958, p. 378)

Les critères retenus pour identifier le savoir algébrique dans des textes mathématiques anciens colorent nettement la lecture que l'on fait de l'histoire de l'algèbre. Comme le rappelle ici Smith, des historiens n'hésitent pas à qualifier d'«algébrique» un problème que l'on peut résoudre par l'algèbre telle qu'on la connaît aujourd'hui. C'est ce qui permet, nous semble-t-il, à Dieudonné d'affirmer dans son histoire abrégée des mathématiques, que des problèmes algébriques ont été posés et résolus depuis les Babyloniens (Dieudonné, 1978, p. 55). En faisant son interprétation à partir de la transposition en langage moderne du texte mathématique ancien, l'historien serait porté à croire que, puisque l'on obtient les mêmes résultats, les procédures anciennes et modernes ne sont que superficiellement différentes et sont deux formes de l'expression d'une même réalité[3] (Martzolf, 1988, cité dans Lins, 1992). Selon Radford, cette manière d'interpréter les textes mathématiques anciens a conduit quelques historiens à supposer que les Babyloniens disposaient déjà du système conceptuel moderne de l'algèbre et à interpréter l'absence chez eux du symbolisme algébrique par l'existence d'un "langage invisible" chez leurs scribes.

> The classical historical account of Babylonian mathematics interpreted a large part of 'non-practical' problems as problems dealing with algebra (and particularly with second degree algebra). This interpretation was inspired by the possibility of translating the calculations shown in

---

[3] Voici un témoignage dans ce sens, exprimée par une historienne des mathématiques dans un forum électronique de discussion sur l'histoire des mathématiques :

> Objet: [HM] Base 60
> Date: Wed, 28 Jul 1999 06:07:15 EDT
> De: Karen Dee Michalowicz <KarenDM@aol.com>
> Répondre-A: historia-matematica@chasque.apc.org
> A: historia-matematica@chasque.apc.org
>
> Having the pleasure of being with Eleanor Robson this week at our Math History Institute, I have learned that many of our mistakes in looking at ancient mathematical artifacts is that we look at them from our own point of view (the reader), rather than the author's point of view. We ascribe mathematics to documents that would never be used by the scribe of the documents.
> [...]
>
> Karen Dee Michalowicz

> Babylonian texts into modern algebraic symbolism. Babylonian Algebra was then seen as an algebra, which contained the corresponding *algebraic concepts* but lacked the corresponding *algebraic symbols*. In other words, this thesis states that the Babylonian scribes could develop an *Invisible Algebraic Language*. However, recent works in the history of mathematics have rejected this interpretation (see Hoyrup 1985, 1986, 1993, 1994) and provide new room for a deep discussion about the conceptual origins of algebra. (Radford, 1995, à paraître)

On trouve le même type d'interprétation historique derrière l'idée de l'existence d'une «algèbre géométrique» chez les Grecs. À ce sujet, note Lins, il y a la croyance qu'un bon nombre de théorèmes «géométriques» seraient en fait «algébriques» mais déguisés sous un «habillage» géométrique, comme semble le penser van der Waerden :

> Presently we shall make clear that this geometric algebra is the continuation of Babylonian algebra. The Babylonians also used the terms 'rectangle' for xy and 'square' for x^2, but beside these and alternating with them, such arithmetic expressions as multiplication, root extraction, etc., occurs as well. The Greeks, on the other hand, consistently avoid such expression.... everything is translated into geometric terminology. But since it is indeed a translation, which occurs here, and the line of thought is algebraic, there is no danger of misrepresentation, if we reconvert the derivations into algebraic language and use modern notation. (van der Waerden, cité dans Fauvel, 1990, p. 14)

Une autre difficulté liée à la lecture historique du développement de l'algèbre provient de la nature des textes étudiés eux-mêmes. On sait que le patrimoine mathématique est passé d'une civilisation à une autre; traduits parfois par des savants, les textes n'étaient pas toujours à l'abri de nombreuses interprétations. Rashed donne l'exemple de l'œuvre *Arithmétiques* de Diophante : «L'ouvrage appartient en fait essentiellement à la théorie des nombres, mais quand il fut traduit, après la constitution de l'algèbre comme science, on a donné aux *Arithmétiques* un style, et même un lexique algébrisé, ce qui constitue déjà une interprétation.» (Rashed, 1985, p. 142)[4]

---

[4] À noter qu'avant la traduction arabe de l'*Arithmétiques* de Diophante, l'algèbre avait déjà été constituée comme discipline mathématique, suite aux travaux d'al-Khawarizmi et de ses successeurs. Pour les mathématiciens arabes, note alors Rashed, al-Khawarizmi est le prédécesseur de Diophante bien que ce dernier ait vécu des siècles avant lui. Par ailleurs, Adel Anbouba note : «La publication par Roshdi Rashed de la traduction arabe de quatre livres de l'Arithmétique de Diophante remet en question le problème tant débattu du texte authentique de Diophante.». (Anbouba, 1978, note de bas de la page

Notre objectif ici ne consiste point à nous livrer à une analyse minutieuse des origines historiques de la genèse de l'algèbre – encore moins à nous intéresser au problème de l'originalité des productions algébriques. Tout ce que nous souhaitons, c'est de saisir le sens de l'algèbre en tant que discipline mathématique. Pour éviter les écueils dûs à une interprétation *a priori* de l'algèbre, nous allons prendre comme point de départ de notre enquête historique à propos de la signification de l'algèbre la période où celle-ci a émergé comme discipline mathématique indépendante avec al-Khawarizmi. Toutefois, il reste clair dans notre esprit que cette émergence ne s'est pas produite dans le vide. Elle a été possible, d'une part, grâce aux contributions de précédentes civilisations reçues en héritage, et d'autre part, grâce à une activité mathématique de l'époque motivée à la fois par des raisons scientifiques et sociales. Nous tentons de préciser davantage ce point dans la section 2.5.1 qui suit.

2.5 HUIT GRANDES ÉTAPES RETENUES DU DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE DE L'ALGÈBRE

Il existe différentes manières d'interpréter le développement historique de l'algèbre. Pour les besoins de notre travail, nous avons retenu huit grandes étapes. Pour chacune d'elles, nous tentons de dégager la signification de l'algèbre qui la caractérise.

2.5.1 L'idée de l'algèbre selon al-Khawarizmi

Afin de comprendre ce qu'était l'algèbre à son tout début, il nous semble utile de nous arrêter un moment sur l'algèbre d'al-Khawarizmi, d'examiner le contexte dans lequel elle est apparue, son objet, ses concepts, sa structure logique ainsi que le mouvement de recherche qu'elle a défini.

---

71). Voir aussi : Roshdi Rashed, Les travaux perdus de Diophante, *Revue d'Histoire des Sciences*, 27 (1974), 97-122; 28 (1975), 3-30.

Mohammed ibn Musa al-Khawarizmi composa à Bagdad, entre 813 et 833, sous le règne d'al-Ma'mùn, son célèbre ouvrage : *Le livre concis d'al-jabr et d'al-muqàbala.* Dans les pages de ce manuel, on voit surgir l'*algèbre*, pour la première fois, comme discipline mathématique distincte, indépendante et en possession de son nom. Origine du mot «algèbre», le mot arabe *al-jabr*, signifie remise en place des os, réparation, remplissage, rabotage : c'est ainsi de façon imagée, qu'est désignée l'opération qui, sur une équation, consiste à ajouter un même terme à ses deux membres[5]. *Al-muqàbala* signifie confrontation, mise en opposition et consiste à simplifier l'équation en éliminant les termes semblables qui se « confrontent » de part et d'autre du signe égalité (Baruk, 1992, p. 68). Il est intéressant de noter que le mot algèbre réfère, originairement, à une *transformation*, attestant l'importance de cette transformation dans cette discipline.

Al-Khawarizmi faisait partie de «Dar al Hikma» – la Maison de la Sagesse, mise sur pied par al-Ma'mun – une véritable Académie des sciences, dont faisait partie au même moment, entre autres, al-Kindi, l'un des plus grands philosophes arabes[6] ainsi qu'al-Hajjaj, le premier traducteur des Éléments d'Euclide et al-Jaouhari, auteur de commentaires des *Éléments* (Youschkevitch, 1976).

Al-Khawarizmi a rédigé des traités dans plusieurs disciplines, notamment en arithmétique, en algèbre, en astronomie, en géographie et sur le calendrier. Comme le notent plusieurs auteurs, (Youschkevitch, 1976; Rashed, 1984), les œuvres d'al-Khawarizmi, en particulier ses traités sur l'arithmétique et l'algèbre, ont exercé une influence prépondérante sur le développement ultérieur des mathématiques. Elles ont été le point de départ de nombreux travaux ultérieurs. Des dizaines de générations se

---

[5] La métaphore serait la suivante: si l'on ajoute un terme à un membre d'une égalité on *casse* cette équation et il faut donc effectuer l'opération d'al-jabr pour rétablir l'état initial de l'équation en ajoutant le même terme à l'autre membre de l'égalité.

[6] Dans l'expression «philosophes arabes» ou encore dans d'autres expressions que nous utiliserons dans la suite, comme «mathématiques arabes», «l'algèbre arabe», l'adjectif «arabe» doit être compris comme signifiant que ces sciences sont écrites en langue arabe et non comme indiquant l'origine arabe des savants. Ces derniers ont été d'origines ethniques diverses. Le qualificatif «arabo-musulman», pour désigner cette science ou culture «arabe» n'est pas non plus acceptable du moment que bon nombre des savants n'étaient pas arabes ni même musulmans. La seule certitude est que la langue arabe était dans la civilisation en question une langue scientifique.

sont formées à leurs études. Al-Khawarizmi a voulu réunir dans ses œuvres, ce qui était le plus important pour les hommes de science et pour les praticiens, en tenant compte particulièrement des besoins de la vie quotidienne (Youschkevitch, 1976). Il nous semble qu'il ne faut jamais perdre de vue le souci didactique des mathématiciens arabes et en particulier d'al-Khawarizmi, pour bien comprendre ces mathématiques.

À l'époque d'al-Khawarizmi, on assiste, selon Rashed,

> (1) à la consolidation et au développement des institutions administratives au niveau de l'empire, (2) à la multiplication des images réduites de ces institutions au niveau des provinces, par suite de l'affaiblissement des pouvoirs des Khalifes et, (3) à l'apparition d'une couche sociale, celle des «kuttàb» ou fonctionnaires, liés à la multiplication des administrations (diwàns) et de leurs images réduites.
> [...] C'est l'existence de cette couche sociale qui a incité, pour la formation de ses membres, à la rédaction de manuels en arithmétique et en d'autres disciplines. En effet, un certain nombre de diwàns avaient besoin, en particulier, de comptabilité financière et étaient donc demandeurs de traités d'arithmétique sûrs et maniables pour la pratique de leur métier (Rashed, 1984, pp. 64-65).

Or, l'étendue et la composition de l'empire abbaside ont mis en présence et confronté plusieurs arithmétiques, notamment la digitale et l'indienne, ajoute Rashed. Toute l'activité mathématique, note cet auteur, s'était d'abord développée en arithmétique, au sens de l'unification des différents systèmes d'arithmétique, mais il fallait justifier cette unification (Rashed, 1984). Il estime que la facilité et la rapidité du maniement sont devenues des critères de préférence parmi les arithmétiques existantes.

Rashed avance la conjecture suivante:

> La confrontation au moins implicite des arithmétiques, a fait apparaître beaucoup plus clairement qu'auparavant la généralité et la nature abstraite du concept d'opération. Vues de cette manière, et en quelque sorte systématisées, les opérations sont dès lors des moyens d'organiser l'exposé arithmétique. La présence de plusieurs arithmétiques a eu pour conséquence, en effet, de relativiser les systèmes de numération pour montrer que l'essentiel est dans le choix de la base et dans les opérations à appliquer» (Rashed, 1984, p. 66).

L'idée de génie d'al-Khawarizmi consiste à utiliser un système décimal de numération *positionnelle* (à l'aide des chiffres indiens), et en particulier en employant un petit cercle semblable au caractère 0. Véritable amplificateur cognitif, le système décimal de numération positionnelle permet l'écriture des nombres (de n'importe quel ordre de grandeur) au moyen d'au plus 10 symboles prédéfinis, de nommer les nombres en utilisant un registre préétabli de noms (noms des 10 symboles ainsi que des différentes positions : unité, dizaine, centaine, etc.) et surtout d'offrir la possibilité d'opérer sur des écritures décimales (et non sur les nombres) et de formuler des procédés généraux de calcul.

Dans son traité d'arithmétique, en effet, al-Khawarizmi explique comment prononcer les adjectifs numéraux dans le cas des grands nombres en utilisant les concepts *d'unité*, de *dizaine*, de *centaine*, de *millier* qu'il venait de définir. Il décrit ensuite minutieusement les opérations de calcul. À la suite des opérations d'*addition* et de *soustraction*, al-Khawarizmi traite de la *division* et de la *multiplication* puis se tourne vers les *fractions*. Enfin, il expose les *algorithmes*[7] pour l'*extraction des racines carrées* (*ibid.*).

Al-Khawarizmi a ainsi réussi son projet d'élaborer une arithmétique utilisant un langage précis et uniformisé et offrant des procédés de calcul à la fois sûrs et maniables. C'est, nous semble-t-il, ce même souci d'uniformisation du langage et la recherche de méthodes de calcul sûres et facilement applicables, qui vont conduire al-Khawarizmi à rédiger son traité d'algèbre pour, explique-t-il, «fournir aux gens un manuel concis dont ils puissent se servir pour leurs problèmes de calcul, pour leurs échanges commerciaux, pour leurs successions et pour l'arpentage de leurs terres.» (Rashed 1984, p. 19). Arrêtons-nous un moment pour tenter de comprendre les principales idées sur lesquelles s'est basé al-Khawarizmi pour créer son algèbre.

Fort de certains enseignements de son expérience réussie en arithmétique, al-Khawarizmi savait, nous semble-t-il, que le succès dans l'élaboration de méthodes

---

[7] Le mot algorithme est une déformation latine du nom Al-Khawarizmi.

générales dépend grandement de la mise en évidence de concepts généraux. Par un effort d'abstraction, il a vu qu'une fois décontextualisés, tous les problèmes dont il cherche à élaborer des méthodes générales de résolution, font intervenir les opérations classiques sur les nombres ainsi que trois notions fondamentales : la *grandeur inconnue* (qu'il désignera par racine[8] ou chose[9]), *son carré* (désignée par «māl[10]») et une *grandeur connue* (le nombre). En plus, la résolution de ces problèmes dépend de la manière dont ces grandeurs sont liées entre elles – soit en langage moderne, dépend de la forme du système de relations entre les grandeurs du problème. Pour décrire la forme d'un tel système de relations, al-Khawarizmi utilise une idée qui, sous certains rapports, se trouve analogue à celle de *position* à la base de son élaboration du système de numération positionnelle. En effet, comme la donnée d'un nombre revient à la spécification des valeurs de certaines positions (unité, dizaine, centaine, millier, etc.), la structure d'un problème, étudié par al-Khawarizmi, peut être décrite de manière analogue en précisant les valeurs à trois positions : une correspondant au carré de la racine, une autre à la racine et la troisième au nombre[11]. Al-Khawarizmi écrit en effet: «de ces trois types [c'est-à-dire, les racines, les carrés des racines et les nombres] les uns peuvent être égaux aux autres, comme quand tu dis : des carrés sont égaux à des racines, des carrés sont égaux à un nombre, des racines sont égales à un nombre». Il poursuit : «J'ai trouvé que ces trois types qui sont les racines, les carrés et le nombre, se composent, et qu'on a donc trois genres composés qui sont des carrés plus des racines égaux à un nombre, des carrés plus un nombre égaux à des racines, des racines plus un nombre égaux à des carrés.»

---

[8] Traduction du mot arabe *gidr*

[9] Traduction du mot arabe *chay'* que les mathématiciens italiens appelleront plus tard *la casa*

[10] Étymologiquement, ce mot désigne un *bien possédé* ou *le montant d'une somme d'argent.*

[11] Il est intéressant de noter l'analogie entre l'écriture décimale générale d'un nombre et celle d'un polynôme : $n = \sum a_i 10^i$, où a_i= 1, 2, 3, ... 9; $P(x) = \sum a_i x^i$ où les a_i sont des nombres. La donnée de la suite ordonnée des coefficients a_i (les valeurs dans les positions 1, 2, 3,...i, ...) détermine complètement l'écriture décimale ou le polynôme.

Plus tard, Sinān ibn al-Fath (Mss. 260 Ryadyāt B. N. Le Caire ff. 95r-104v) a établi explicitement ce lien lorsqu'il a introduit d'une manière plus générale la puissance de l'inconnue :

> (...) appelons le premier de cela le nombre, le deuxième racine, le troisième carré (māl), le quatrième cube (maka'ab), le cinquième carré-carré, le sixième madād, le septième carré-cube, on aura ensuite la huitième proportion, et la neuvième, et ainsi tout ce que tu veux. Il t'es permis de changer ces noms, une fois que tu as compris l'intention. Mais la coutume est de donner ces noms ; nous nous y conformerons donc.
> Ceci est un exemple pour montrer ce que nous avons décrit, et il est selon l'ordre du calcul indien.

un	dix	cent	mille	dix mille
nombre	racine	carré	cube	carré-carré
cent mille	mille mille	dix mille-mille	cent mille-mille	
madād	carré-cube	huitième proportion	neuvième proportion	

(Cité dans Rashed, 1984, p.21, note de bas de page 11)

Al-Khawarizmi retient, en langage moderne, trois équations binômes et trois équations trinômes[12]:

$$ax^2 = bx \qquad ax^2 = c \qquad bx = c$$

$$ax^2 + bx = c \qquad ax^2 + c = bx \qquad ax^2 = bx + c$$

Retenons ici que la tendance à chercher des méthodes générales a amené al-Khawarizmi à dégager des concepts généraux comme ceux *d'inconnue* et *d'équation*. La notion d'équation apparaît dès le départ pour elle même, et, peut-on dire, de manière générique, dans la mesure où elle ne surgit pas simplement au cours de la solution d'un problème, mais est délibérément appelée à désigner une classe infinie de problèmes, note Rashed (*ibid.*). Nous expliquerons plus loin pourquoi al-Khawarizmi se limite au

---

[12] Al-Khawarizmi évite de cette façon d'utiliser des nombres négatifs et la possibilité que l'un des coefficients de l'équation soit nul. Il n'acceptait pas en outre les solutions négatives ou nulles. Rappelons que Nicolas Chuquet (XVe siècle) et Michael Stifel (vers 1487 – 1567) qualifiaient les nombres négatifs de «nombres absurdes»; Françoit Viète (1540 – 1603) les rejetait complètement et René Descartes (1596 – 1650) acceptait les solutions négatives mais les appelait «racines fausses».

cas des équations à une inconnue de degré 2 au plus. Intéressons-nous maintenant au traité d'al-Khawarizmi, *Le livre concis d'al-jabr et d'al-muqàbala*, pour mieux comprendre la signification de l'algèbre de cet auteur.

La première partie, théorique, est destinée à l'établissement de ce calcul — d'al-jabr et d'al-muqabala, c'est-à-dire de ses termes primitifs et de ses concepts. Dans la deuxième partie, al-Khawarizmi fixe également les bases des procédés réguliers qui permettent de ramener les problèmes de la pratique calculatoire aux types algébriques fondamentaux. Quant aux dernières parties, d'intention strictement pratique, elles traitent de l'application de ce calcul aux transactions commerciales, à l'arpentage, aux mesures géométriques, et, enfin, aux testaments. On voit donc à la simple lecture du livre d'al-Khawarizmi, fait observer Rashed, que l'algèbre se présente d'emblée comme une discipline théorique, munie de prolongements appliqués aussi bien au domaine des nombres qu'à ceux de la géométrie métrique. (*ibid.*)

Un deuxième stade de généralité est atteint lorsque al-Khawarizmi introduit la notion de *forme normale*. Il exige de réduire systématiquement chaque équation à la forme normale correspondante en utilisant les transformations algébriques – *transposition* et *réduction*. Dans le quatrième cas ($ax^2 + bx = c$), par exemple, il écrit : «De même, si l'on mentionne deux carrés, ou trois, ou moins ou plus, réduis donc à un seul carré, et réduis les racines et les nombres qui se trouvent en même temps que lui ce à quoi tu as réduis les carrés.» (Rashed, p. 23). Pour les équations

$$ax^2 + bx = c \qquad ax^2 + c = bx \qquad ax^2 = bx + c$$

il arrive alors aux trois équations écrites sous forme normale :

$$x^2 + px = q \qquad x^2 + q = px \qquad x^2 = px + q$$

Tout est donc en place pour permettre l'établissement des formules algorithmiques des solutions pour chacun de ces cas.

Examinons par exemple le cas de l'équation : $x^2 + px = q$, avec p=10 et q=39. Que les coefficients soient affectés d'une valeur particulière (nombre rationnel positif) ne diminue en rien la généralité du raisonnement, estime Rashed. Al-Khawarizmi écrit : «La règle en cela, est que tu divises les racines en deux moitiés, dans ce problème cinq, que tu multiplies par lui-même, on a vingt-cinq, tu l'ajoutes à trente-neuf, on a soixante-quatre; tu prends sa racine qui est huit, tu en retranches la moitié des racines, qui est cinq , il reste trois, qui est la racine du carré que tu cherches, et le carré est neuf» (Rashed, p. 23). Autrement dit, il obtient dans ce cas l'expression suivante :

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

Pour les équations $x^2 = px + q$ et $x^2 + q = px$, toujours avec p=10 et q=39, il obtient respectivement :

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ , si } \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$$

Dans ce dernier cas, il précise que si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, «alors la racine du carré est égale à la moitié des racines exactement, sans excédent ni diminution» ; et si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, alors «le problème est impossible».

La formule de solution est alors justifiée mathématiquement à l'aide d'une démonstration proto-géométrique, ou preuve par figures, selon le langage même d'al-Khawarizmi (Anbouba, 1978, p. 71) et il se trouve alors en mesure d'écrire que tout ce qui relève de l'algèbre «doit te mener à l'un des six types d'équations que j'ai décrits dans mon livre» (Rashed 1984, p. 24).

Voici par exemple le procédé qu'al-Khawarizmi propose pour la résolution de l'équation : $x^2 + px = q$, avec p = 10 et q = 39. Il commence par construire un carré comme dans la figure 2.1.

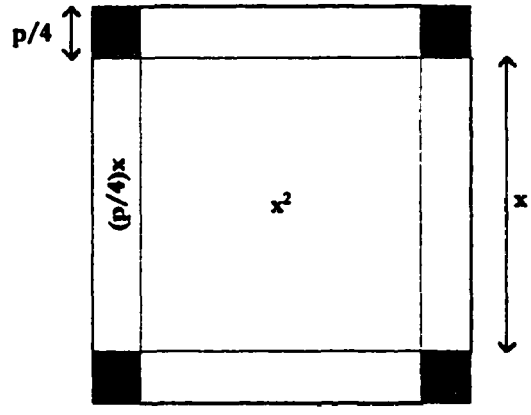


Figure 2.1 : Justification géométrique d'al-Khawarizmi

Il calcule l'aire du grand carré de côté p/2 + x de deux manières différentes. Il obtient d'une part $(x + \frac{p}{2})^2$ et d'autre part $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ ou encore, $q + \frac{p^2}{4}$, c'est-à-dire 39 + 25 = 64. De là, il déduit que x +5 = 8 , soit x = 3.

Après cette étude théorique des équations quadratiques, al-Khawarizmi consacre quatre brefs chapitres à l'étude de quelques aspects de l'application des lois élémentaires de l'arithmétique aux expressions algébriques les plus simples. Il étudie, en effet, dans l'ordre, l'addition et la soustraction, la division, la multiplication et l'extraction de la racine carrée; autrement dit, les mêmes opérations dont il a traité dans son livre d'arithmétique. Voici par exemple ce qu'il propose dans son court chapitre sur la multiplication : «Comment multiplier les choses (les inconnues), qui sont les racines, les une par les autres, si elles sont seules ou si elles sont ajoutées à un nombre, ou si on en soustrait un nombre, ou si elles sont soustraites d'un nombre, ...» (Rashed, 1984, pp.24-25), c'est-à-dire les produits du type : $(a \pm bx)(c \pm dx)$, dans le cas où a, b, c et d sont des nombres rationnels positifs.

Ces chapitres sont bien plus importants par l'intention qui les anime que par les résultats qu'ils renferment, estime Rashed. D'après lui, si l'on considère en effet la place qu'al-Khawarizmi attribue à ces quatre chapitres et enfin l'autonomie qu'il restitue à chacun d'eux, il apparaît que l'auteur a voulu entreprendre pour elle-même l'étude du *calcul algébrique, c'est-à-dire des propriétés des cinq opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication, division et extraction de la racine carrée) ainsi que les transformations d'al-jabr (transposition) et d'al-muqabala (réduction) sur les binômes et trinômes associés aux équations considérées dans la partie théorique précédente de son livre.* Et, aussi rudimentaire qu'elle puisse paraître, cette étude n'en représente pas moins la première tentative consacrée au calcul algébrique comme tel; car les éléments de ce calcul n'apparaissent pas simplement au cours de la solution des différents problèmes, mais font l'objet de chapitres relativement autonomes (Rashed, 1984).

Nous saisissons donc avec davantage de précision l'idée de l'algèbre selon al-Khawarizmi : il s'agit de la théorie des équations linéaires et quadratiques à une seule inconnue et du calcul élémentaire sur les binômes et trinômes associés (calcul algébrique), sans que soit encore formulée l'idée de polynôme en général (Rashed, 1984). La nouveauté de la conception, estime Rashed, réside dans le fait que jamais auparavant les concepts de cette théorie n'étaient apparus en même temps et jamais ils n'avaient été reliés de cette façon. Mais si al-Khawarizmi s'en tient, au plus, au 2e degré, c'est simplement en raison de l'idée qu'il se fait du procédé de la résolution d'une équation, lequel doit être à la fois général, calculable et bien fondé mathématiquement. En fait, seule la solution par radicaux[13] pouvait répondre aux exigences d'al-Khawarizmi, ce qui explique la restriction aux équations du second degré (*ibid.*).

D'autre part, pour résoudre l'équation que nous écrivons en langage moderne $x^2 + 10x = 39$, al-Khawarizmi considère au départ un carré (figure 2.1) de côté $x + 5$, comme si le segment de longueur x était déjà connu. En représentant l'inconnue, il

peut opérer sur elle[14], raisonnant ainsi d'une manière analytique. Arrêtons-nous un moment pour expliquer en quoi consiste un tel mode de pensée.

Mode de pensée analytique

Dans le cadre de la résolution de problèmes à une seule inconnue, en algèbre, on parle de *pensée analytique* dans le sens suivant :

1. On suppose qu'il existe une valeur (éventuellement plusieurs) de l'inconnue répondant aux conditions du problème. On accepte de représenter cette valeur par un symbole et d'opérer sur celui-ci comme si la valeur était connue.

2. À l'aide de ce symbole, on traduit les conditions du problème sous la forme d'une équation ou inéquation.

3. On cherche des conséquences logiques de 1. et 2., généralement jusqu'à ce que l'on soit en mesure de résoudre le problème. (Si jamais on aboutit à une conséquence impossible, par exemple $0 = 1$, alors on peut conclure que la supposition initiale était fausse, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de valeur de l'inconnue répondant aux conditions du problème.)

Afin d'illustrer cette caractérisation de la pensée analytique, considérons le problème suivant:

> Problème 1. Trouver les dimensions d'un terrain de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et dont la superficie vaut 128 m².

et comparons deux démarches de résolution, l'une arithmétique, l'autre algébrique.

---

13 Rashed rappelle qu'al-Khayyam refuse de considérer comme algébrique la solution de l'équation cubique à l'aide de l'intersection des courbes, et consacre ce qualificatif à la seule solution par radicaux (Rashed, 1984, p. 25).

14 Rappelons que l'algèbre d'al-Khawarizmi, et l'algèbre arabe en générale, est exprimée complètement en mots.

Une démarche arithmétique : On décompose 128 comme produit de deux entiers naturels de toutes les manières possibles: $128 = 128 \times 1 = 2 \times 64 = 4 \times 32 = 8 \times 16$. On voit alors que la dernière décomposition fournit la solution désirée : le rectangle cherché a pour largeur 8m et pour longueur 16m.

Une démarche algébrique faisant appel à la pensée analytique : On suppose le problème résolu et on désigne par x la largeur du rectangle (exprimée en mètres). D'après les conditions du problème, la longueur vaut $2x$ et on a : $x(2x) = 128$. On résout maintenant cette équation. On obtient :

$$x(2x) = 128 \Rightarrow 2x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow (x = 8 \ \ ou \ \ x = -8)$$

On conclut alors que les seules solutions possibles sont 8 et –8. On rejette la valeur négative et on conclut que le terrain rectangulaire cherché a pour largeur 8m et pour longueur 16m (sa superficie est bien 128 m²).

Dans la démarche arithmétique, on est parti d'une grandeur connue pour arriver à découvrir la valeur de l'inconnue. Comme le font remarquer Mason et Binnz (1993), dans une telle démarche, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues; jamais on n'opère sur des inconnues. Dans la démarche algébrique faisant appel au raisonnement analytique, par contre, on a procédé de l'inconnu vers le connu, en opérant sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu.

Il va de soi que le symbole utilisé pour représenter l'inconnue peut être verbal ou écrit ; dans ce dernier cas, il peut être un mot (comme *racine* utilisé par al-Khawarizmi) ou n'importe quel caractère écrit (comme x, ?, □, ...). La nature du symbole est secondaire du moment que ce symbole est utilisé comme substitut de l'inconnue, que l'on peut manipuler lorsqu'on veut opérer sur l'inconnue.

> We symbolise when we want something that is absent or missing in some way – and then we work on or with the symbol as a substitute, and on occasion as a consolation.
> [...] One central reason, then, for symbolising is that symbols allows us to *manipulate*, by proxy, things that are not easily handled, or which are even impossible to handle, by our physical selves (Pimm, 1995, p. 109).

Depuis fort longtemps, les Anciens opposaient les méthodes d'analyse et de synthèse. Hintikka et Rems (1974) expliquent :

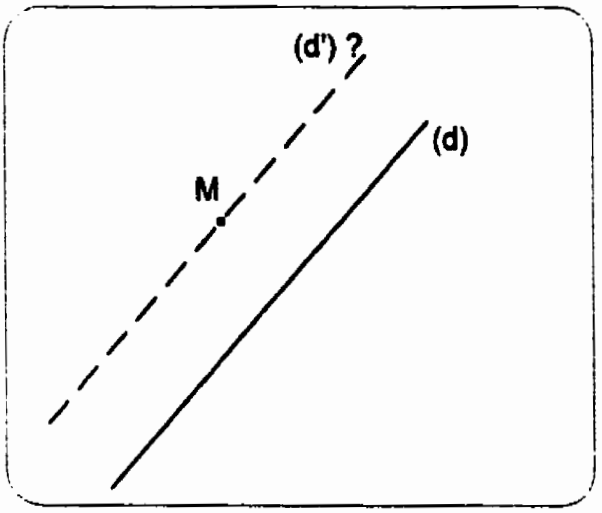
> Analysis is a method Greek geometers used in looking for proofs of theorems and for constructions to solve problems. In both cases, analysis apparently consists in assuming what was being sought for, in inquiring where it comes from, and in proceeding further till one reaches something already known. Analysis is followed by a synthesis in which the desired theorem or construction is established step by step in the usual manner by retracing the stages of the analysis in the reverse order. (p. 1)

ou encore, comme Pappus lui-même l'affirme:

> Now, analysis is a method of taking what is sought as though it were admitted and passing from it through its consequences in order to something which is admitted as a result of synthesis; for in analysis we suppose that which is sought to be already done, and we inquire what it is from which this comes about, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on until, by retracing our steps, we light upon something already known or ranking as first principle; and such a method we call analysis, as being a reverse solution. (..) But in synthesis, proceeding in the opposite way, we suppose to be already done that which was last reached in the analysis, and arranging in their natural order as consequence what were formerly antecedents and linking them one with another, we finally arrive at the construction of what was sought; and this we call synthesis. (Fauvell & Gray, 1990, p. 209, cité dans Lins, 1992, p. 15).

Remarquons qu'en plus de la pensée analytique qui vient d'être décrite, il existe une autre forme d'analyse en mathématiques. En voici une illustration à l'aide du problème géométrique suivant :

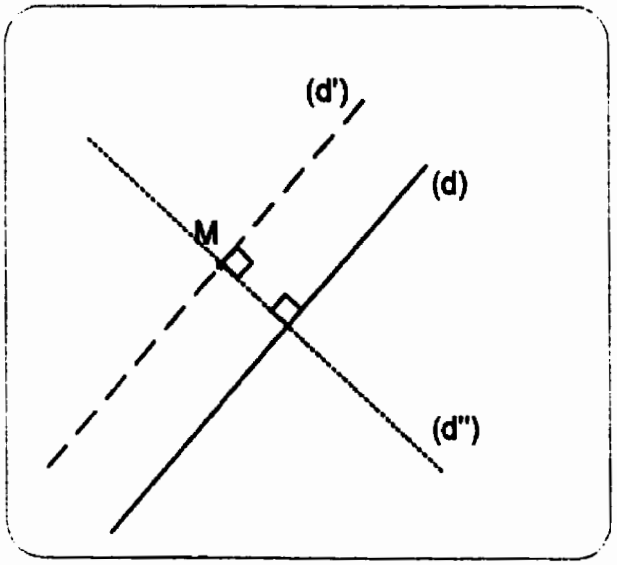
Problème 2 : Soit (d) une droite dans le plan et M un point du plan extérieur à (d). À l'aide d'une règle et d'un compas seuls, construire la droite (d') parallèle à (d) et passant par M.



on peut résoudre ce problème en utilisant le théorème suivant :

> Soient (d) et (d') deux droites du plan. S'il existe une droite qui soit perpendiculaire à la fois à (d) et à (d') alors ces deux droites sont parallèles.

Il suffit de construire la droite (d'') passant par M et perpendiculaire à (d) et ensuite construire la droite (d') perpendiculaire à (d'') et passant par M.



La résolution du problème 2 est donc ramenée à la construction, à l'aide de la règle et du compas, d'une droite perpendiculaire à une autre et passant par un point donné. Cette construction auxiliaire peut être effectuée en remarquant que la médiatrice d'un segment est, par définition même, une droite perpendiculaire à la droite portant ce

segment. Le problème revient alors à construire la médiatrice d'un segment porté par la droite (d) et passant par le point M. Avec le compas, on commence par tracer deux points A et B sur la droite (d) qui soient à égale distance du point M. Le point M est donc sur la médiatrice (d') du segment [A , B]. De la même manière, on construit ensuite la droite (d") perpendiculaire à (d') et passant par M. Dans cette forme d'analyse, on opère "à reculons" à l'aide de conditions logiquement suffisantes, alors que dans la précédente, on procédait à l'aide de conditions logiquement nécessaires. Hintikka et Rems (1974) expliquent dans leurs termes les deux formes d'analyse ainsi : «"analysis as a downward movement" (i.e., as a deduction of consequences from the desired conclusion) and "analysis as an upward movement" (i.e., as a movement from the desired result to premises from which it could be deduced).» (p. 12).

Comme on le constate, les deux définitions précédentes du processus d'analyse s'éloignent sensiblement de sa définition communément utilisée : «action de décomposer un tout en ses éléments constituants» (voir LE PETIT ROBERT).

Après avoir noté l'utilisation de la méthode analytique dans l'algèbre d'al-Khawarizmi, rappelons que cette dernière est exprimée complètement avec des mots. Par ailleurs, les liens «génétiques» de cette algèbre avec l'arithmétique et la géométrie ont orienté par la suite le développement de l'algèbre dans deux directions: d'abord l'une de nature arithmétique et ensuite une autre de nature géométrique.

2.5.2 Les algébristes arithméticiens arabes ou l'algèbre comme arithmétique des inconnues

La deuxième étape du développement de l'algèbre que nous avons retenue est celle marquée par *l'arithmétisation* de l'algèbre – projet élaboré par al-Karaji (fin Xe siècle et début du XIe siècle) – telle qu'elle avait été constituée par al-Khawarizmi, puis développée par ses successeurs comme Abù Kàmil (850-930).

> Il s'agit d'une part, selon les termes même de l'un des successeurs d'al-Karaji, As Samaw'al (1130-1174) «d'opérer sur les inconnues comme les arithméticiens opèrent sur les connues» ; et, d'autre part, d'opter de plus en plus pour les démonstrations algébriques, aux dépens des démonstrations géométriques. C'est donc vers une application systématique des opérations de l'arithmétique élémentaire aux expressions algébriques que l'on s'oriente ; or cette application a été rendue possible par la première élaboration en termes généraux, de l'idée de polynôme. (Rashed, 1984, p. 27)

La tâche est claire et l'algèbre acquiert la signification qui est désormais la sienne, poursuit Rashed (*ibid*). Il s'agit, d'une part d'appliquer de manière systématique les opérations de l'arithmétique élémentaire aux expressions algébriques – soit des expressions polynomiales, formées de nombres rationnels positifs spécifiques et de différentes puissances de la racine – et, d'autre part, de considérer les expressions algébriques indépendamment de ce qu'elles peuvent représenter, pour pouvoir leur appliquer ces opérations générales qui sont appliquées aux nombres. Ainsi, après avoir énoncé en toute généralité la règle équivalente à $x^n \times x^m = x^{n+m}$, pour n et m entiers – grâce notamment à la définition $x^0 = 1$ pour $x \neq 0$ – et la règle des signes en toute généralité[15], ces mathématiciens ont étudié l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des polynômes ainsi que l'extraction de la racine carrée d'un polynôme (*ibid*).

> À la suite de l'extension du calcul algébrique aux expressions rationnelles, al-Karaji et ses successeurs poursuivent la réalisation du même projet et

---

15 (1) $x \leq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

(2) $x \leq 0,\ y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

(3) $x \leq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

(4) $x \leq 0,\ y \leq 0,\ |x| \geq |y| \Rightarrow x - y \leq 0$

(5) $x \leq 0,\ y \leq 0,\ |x| \leq |y| \Rightarrow x - y \geq 0$

(6) $x \geq 0 \Rightarrow 0 - x \leq 0$

(7) $x \leq 0 \Rightarrow 0 - x \geq 0$

ou comme l'écrit al-Samaw'al «le produit d'un nombre négatif – *al-nāqis* – par un nombre positif – *al-zā'id* – est négatif, et par un nombre négatif est positif. Si nous soustrayons un nombre négatif d'un nombre négatif supérieur, le reste est leur différence négative. Celle-ci reste positive si nous soustrayons un nombre négatif d'un autre négatif inférieur. Si d'un nombre positif nous soustrayons un nombre négatif, le reste est leur somme positive. Si d'une puissance vide (*martaba khāliya*) nous soustrayons un nombre positif, le reste est le même négatif, et si d'une puissance vide nous soustrayons un nombre négatif, le reste est le même nombre positif. » (Rashed, 1984, p. 46)

> veulent montrer, comme il l'écrit, "comment opérer au moyen de la multiplication, la division, l'addition, la soustraction et l'extraction des racines" sur les quantités irrationnelles algébriques. Al-Samaw'al pose la question presque dans les mêmes termes: "comment utiliser les instruments arithmétiques dans les quantités irrationnelles ? ". (Rashed, 1984, p. 48)

Ainsi, soutient Rashed (1984), vers la fin du Xème siècle et le début du XIème siècle, on assiste à l'achèvement de la constitution de l'algèbre des polynômes et on a une meilleure connaissance de la structure algébrique des nombres réels; les irrationnels algébriques sont étudiés en tant que nombres et non plus en tant que grandeurs.

Rappelons que dans l'algèbre d'al-Khawarizmi, le calcul algébrique se résumait au calcul élémentaire – c'est-à-dire à l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines carrées ainsi que des transformations d'al-jabr et d'al-muqabala – sur des binômes et trinômes à coefficients rationnels positifs. Le travail des algébristes arithméticiens s'inscrit dans une perspective de l'extension: extension du calcul algébrique et extension de son domaine d'application. Cette double extension ressert la dialectique entre l'algèbre et l'arithmétique.

Si l'arithmétique a permis de développer l'algèbre, elle a en retour bénéficié du progrès de cette dernière, et en particulier, des possibilités qu'offrait désormais le calcul algébrique une fois étendu. Dans ce sens, Rashed observe:

> Il est vrai que les arithméticiens prédécesseurs des algébristes des XIè et XIIè siècles extrayaient les racines carrées et cubiques et disposaient des formules d'approximation pour les mêmes puissances. Mais, à défaut du calcul algébrique abstrait, ils ne pouvaient généraliser ni leurs résultats, ni leurs méthodes, ni leurs algorithmes. Avec la nouvelle algèbre, la généralité du calcul algébrique abstrait, une fois étendu, devenait constituante d'un chapitre d'analyse numérique, qui n'était jusqu'alors qu'une somme de procédés, sinon de recettes (Rashed, 1984, p. 311).

D'un autre côté, si dès le départ l'algèbre se présente comme un calcul, son développement se fait dans le sens de l'extension théorique de ce calcul et de l'extension du domaine de son application. Ce double mouvement d'extension constituera aussi par la suite un moteur du développement de l'algèbre. La relation

entre le calcul algébrique et son domaine d'application (que nous désignerons par la suite par «espace de calcul algébrique») est de nature dialectique. En effet, à tout calcul algébrique correspond un espace de calcul dans lequel il se déploie et, inversement, à tout espace de calcul correspond par abstraction un calcul algébrique. Au départ, le calcul algébrique prend forme, si l'on peut dire, sur la base du moule défini par la pratique calculatoire de l'espace de calcul; il se détourne ensuite de ce moule et tend vers sa propre autonomie, cherchant une extension devenue nécessaire. Mais cette extension théorique rendra possible, à son tour, l'élargissement du domaine dans lequel le calcul étendu peut être réalisé. C'est dans ce sens, nous semble-t-il, que l'on peut comprendre, en particulier, la relation entre les extensions successives des systèmes de nombres et le développement du calcul algébrique, laquelle occupe une place centrale dans le curriculum des mathématiques préuniversitaires.

Avec al-Karaji et ses successeurs, on assiste à un nouvel envol de l'algèbre, cette dernière étant vue, selon l'expression même de l'époque, comme une «arithmétique des inconnues» et conçue comme étant essentiellement analytique.

La citation suivante d'al-Karaji éclaire la signification de l'algèbre et de la méthode algébrique que leur donnait cet auteur :

> Sache que toute (la science du) calcul consiste à déterminer les inconnues à l'aide des données connues. On ne parvient à cette détermination que grâce à trois choses. Premièrement, et c'est là la plus difficile : la formulation (*tanāwul*) du problème à l'aide d'un traitement l'amenant au stade de l'équation, ce à quoi on parvient avec une longue pratique et une connaissance de règles que nous avons exposées dans notre ouvrage intitulé Badiʿ. Deuxièmement : les conditions du problème, parce que ce sont des auxiliaires puissants. Troisièmement : les opérations de l'algèbre, à savoir l'augmentation, la diminution, la multiplication, la division, l'addition, la soustraction, la proportion, la restauration et la réduction (al-jabr wa'l-muqābala), enfin la détermination de l'inconnue.
> Dans tout problème qui t'est proposé et que tu désires résoudre, tu poseras l'inconnue x (*chay'*)[16] — car tel est le nom par lequel on exprime toute inconnue chay')—; ou bien, tu poseras ladite inconnue x^2 (*māl*) — x^2 représentant le produit de la multiplication d'une quantité indéterminée

[16] *chay'* signifie: chose. On retrouvera cette appellation de l'inconnue chez les algébristes italiens *la cosa*.

> par elle même — : tu arrêteras ton choix de l'inconnue d'après les nécessités du problème, suivant la manière susdite, jusqu'à tant que soit amené le problème au stade de l'établissement de l'équation. On parvient alors nécessairement à l'un des six problèmes[17] (Cité dans Sesiano, 1977, p. 301)

2.5.3 Les algébristes géomètres arabes ou l'algèbre comme théorie des équations algébriques

Arithmétiser l'algèbre a été, comme nous venons de le voir, le premier courant dans le développement de l'algèbre. Le deuxième courant, quant à lui, est associé aux efforts pour faire progresser l'algèbre au moyen de la géométrie et marque selon nous la troisième grande étape du développement historique de l'algèbre. Al- Khayyām et al-Tūsī (mort en 1213) sont les principales figures de ce courant que nous allons maintenant décrire dans ses grandes lignes.

Les mathématiciens arabes connaissaient les problèmes se ramenant à la résolution d'équations du 3ème degré, tels ceux de la duplication du cube ou de la trisection de l'angle, qui avaient été étudiés antérieurement par les Grecs. À aucun moment, cependant, les mathématiciens d'avant al-Mahani n'avaient songé à ramener ces problèmes à leur expression algébrique – par exemple $x^3 = 2$ dans le cas du problème de la duplication du cube (Rashed, 1985). La tendance à traduire algébriquement les problèmes de 3ème degré se renforce au Xè siècle, grâce notamment au développement de la théorie des équations bicarrées et du calcul algébrique abstrait réalisé par al-Karaji et ses successeurs (ibid.). Or, estime Rashed,

> ces traductions algébriques de problèmes du 3ème degré par al-Mahani, al-Biruni et d'autres mathématiciens contemporains de ces derniers comme Abu'l-jud al-Layth, ont posé un problème jusque-là impensé : peut-on ramener ces problèmes à des équations cubiques ? Peut-on par ailleurs classer l'ensemble des problèmes de 3ème degré, sinon pour tenter une solution aussi élégante — par radicaux — que celle de l'équation du second degré, au moins pour donner des solutions systématiques ? (...) Le

---

[17] À savoir les six types d'équations élémentaires: $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$; $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$

> problème et la démarche d'al- Khayyām pour lui fournir une solution vont constituer un autre commencement de l'algèbre. (Rashed, 1985, p. 55)

Le problème étudié par al-Khayyām est le suivant: «peut-on ramener des problèmes de droites, de plans, de solides, à des équations de degré correspondant, d'une part, et, d'autre part, classer l'ensemble des équations de 3e degré pour chercher, à défaut d'une solution par radicaux, des solutions réglées au moyens de l'intersection de courbes auxiliaires ?» (Woepcke, 1958, rapporté par Rashed, 1984, p. 312).

Dans le traité d'Omar al- Khayyām «Démonstration de problèmes d'al-jabr et d'al-muqabala» datant de l'an 1074, l'algèbre apparaît comme *la théorie des équations que nous appelons aujourd'hui algébriques.* Dans ce traité, al- Khayyām ne s'intéresse pas à l'élaboration théorique du calcul algébrique, comme le faisaient les algébristes arithméticiens, mais considère uniquement la résolution des équations algébriques. Il explique ainsi l'essence de la science d'algèbre : «Les solutions algébriques[18] sont trouvées à l'aide d'une équation, c'est-à-dire d'une manière bien connue en rendant égales des puissances différentes» (Rosenfeld[19], 1961, p. 18; cité dans Youschkevitch, 1976, p.95). En d'autres termes, explique Youschkevitch, l'algèbre est la théorie des équations dont les membres sont des polynômes entiers (ibid.). Les historiens Arnaledez, Massignon et Youschkevitch nous résument ici l'objet du traité algébrique d'al- Khayyām:

> L'objet de l'algèbre [telle qu'elle ressort du traité d'al- Khayyām] est dit être le nombre ou la quantité inconnue mise en relation avec d'autres nombres ou quantités connues. Cette relation est exprimée sous forme d'équation, c'est-à-dire en égalant des puissances à d'autres. Par cela même, l'algèbre est considérée comme la science des équations qu'aujourd'hui nous appelons algébriques.
> Après avoir noté qu'on a vainement cherché à déterminer les solutions numériques des équations cubiques (autrement dit, à les résoudre par radicaux), Khayyām exprima l'espoir que cette lacune serait comblée à l'avenir ; effectivement, au début du XVIe siècle, les Italiens y parvinrent. La méthode générale de résolution de Khayyām est une construction des racines par l'intersection de sections coniques.

---

[18] Soit les solutions pouvant être obtenues par radicaux (Voir aussi la note de bas de page 13)
[19] Omar al-Khayyām, *Traités mathématiques.* Traduit par B.A. Rosenfeld, Moscou 1961(en russe)

> L'essentiel du traité est consacré à la classification des équations[20], le choix correspondant à chaque classe d'un couple de sections coniques et à la détermination du nombre possible des racines positives ainsi qu'à leurs limites, c'est-à-dire, dans le langage actuel, à la séparation des racines. Les équations sont étudiées de façon générale, c'est-à-dire que leurs coefficients sont supposés être des nombres positifs quelconques. Khayyām distingue en tout 14 types canoniques. Pour chacun d'eux, il indique les sections coniques, paraboles, hyperboles équilatères et circonférences, dont les abscisses des points d'intersection expriment les racines des équations, et il analyse les conditions de possibilité de racines positives. (Arnaledez, Massignon et Youschkevitch., 1966, pp. 481-482)

À défaut d'une solution par radicaux des équations du 3ème degré, l'idée d'al-Khayyām est de chercher des solutions au moyen de l'intersection de courbes auxiliaires. Mais, comme le précise Rashed, si les solutions de ces équations sont obtenues au moyen de l'intersection de deux coniques, il reste que, dans chaque cas, cette intersection est démontrée algébriquement, c'est-à-dire au moyen des équations des courbes (Rashed, 1984).

L'exemple suivant, cité par Rashed (1984, pp. 55-56), consistant à résoudre l'équation $x^3 + ax = b$ illustre l'emploi de la méthode d'intersection des courbes pour la résolution d'équations cubiques.[21] La méthode poursuivie par al-Khayam revient à résoudre simultanément les deux équations:

(1) $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (équation du cercle)

(2) $x^2 = \sqrt{a}\,y$ (équation de la parabole)

où $\sqrt{a}$ est le double du paramètre de la parabole et b/a est le diamètre du cercle. En remplaçant y dans (1) par sa valeur tirée de (2) et en effectuant les simplifications

[20] De degré inférieur ou égal à 3.

[21] Pour un examen plus détaillé de cette théorie des équations algébriques telle qu'elle fut élaborée par al-Khayyam et développée surtout par al- Tūsī, on pourra consulter l'article de Roshdi Rashed: Résolution des équations numériques et algèbre: Saraf-al-Din-al- Tūsī, Viète. (1974). *Archive for History of Exact Sciences*. Volume 12, n. 3 (pp. 244-290). New York: Springer-Verlag.

nécessaires, on obtient l'équation : $x(x^3 + ax - b) = 0$. En éliminant la solution triviale 0, on arrive bien à la solution cherchée.

Devant la difficulté de donner aux équations du troisième degré une solution algébrique brève et élégante, les algébristes géomètres arabes ont été amenés à chercher d'autres méthodes, numériques, de résolution (Rashed, 1974, p. 252). Rashed résume ainsi la démarche qu'al-Tūsī a suivie dans son *Traité des équations* :

> 1 — Pour résoudre les équations, il les classe en deux sections: l'une contenant les équations qui ont toujours des solutions (Al-Tūsī les donne); l'autre correspond à celles qui n'ont de solution que sous certaines conditions. Il entreprend ensuite la discussion.
> 2 — Au moyen d'une transformation affine $x \to x+a$ ou $x \to a - x$, il réduit les équations à résoudre à d'autres équations dont il connaît la solution.
> 3 — Pour résoudre ces équations, il étudie le maximum des expressions algébriques. Il prend «la dérivée première» de ces expressions qu'il annule et démontre que la racine de l'équation obtenue, substituée dans l'expression algébrique donne le maximum.
> 4 — Il ne considère ni volume ni surface «maxima», mais bien des «limites».
> 5 — Une fois trouvée l'une des racines d'une équation cubique, il lui arrive, pour déterminer l'autre racine, d'étudier une équation du second degré, qui n'est autre que le quotient de la division de l'équation cubique par le $(x - r)$, où r est la racine trouvée. En d'autres termes, il sait que le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ est divisible par $(x - r)$, si r est une racine de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
> 6 — Il lui arrive également de trouver cette équation du second degré d'un type qu'il n'a pas étudié auparavant, comme par exemple $x^2 - bx = c$, il l'a ramène alors par une transformation affine à un type d'équation connu.
> 7 — Après avoir étudié l'équation, il essaie de déterminer une borne supérieure et une borne inférieure de ses racines.
> 8 — Si l'on regroupe les équations semblables, par exemple, $ax^3 + bx = c$, $ax^3 + c = bx$, $ax^3 = bx + c$, qui ne sont autres que $ax^3 + bx + c = 0$, on peut alors retrouver a posteriori la formule dite «de CARDAN». Autrement dit, cette formule est présente localement mais non pas globalement dans le cas des racines réelles. (Rashed, 1984, p. 176)

Dans sa discussion des équations cubiques, al-Tūsī parvient à saisir et à exprimer l'importance du rôle du discriminant. En effet, en discutant l'existence des racines positives de l'équation $x^3 + a = bx$, il constate d'abord que si x_0 est une telle racine,

alors x_0 doit être inférieure ou égale à $\sqrt{b}$, et que d'autre part, x_0 doit vérifier l'égalité $x_0^3 + a = bx_0$. Al-Tūsī cherche la valeur pour laquelle $y = bx - x^3$ atteint son maximum, et trouve en annulant la dérivée première : $x = (b/3)^{1/2}$. Ce maximum est donc : $b(b/3)^{1/2} - (b/3)^{3/2} = 2(b/3)^{3/2}$

Il existe donc une racine positive si et seulement si $a \leq 2(b/3)^{3/2}$, ce qui équivaut à $\frac{b^3}{27} - \frac{a^2}{4} \geq 0$. Le rôle du discriminant $D = \frac{b^3}{27} - \frac{a^2}{4}$ est donc ainsi établi et algébriquement élaboré pour l'étude de l'équation cubique (Rashed, 1984).

Dans sa démarche, la figure géométrique ne joue qu'un rôle auxiliaire et loin de s'y astreindre, al-Tūsī pense en termes de relations fonctionnelles et étudie les courbes au moyen de leurs équations, estime Rashed (*ibid.*). Il conclut :

> La distance parcourue depuis l'œuvre d'al-Khawarizmi, ne se mesure donc pas seulement par rapport à la seule extension de la discipline mais aussi par le changement de sens de la connaissance algébrique. Si en effet l'algèbre s'affirme comme la science des équations algébriques, celles-ci ne sont pas liées seulement à des nombres et à des segments, elles se rapportent également à des courbes dans le plan, l'algèbre intègre alors des techniques présentes dans la tradition qui a participé activement à son renouvellement : celle des infinitésimentalistes. (Rashed, 1984, p. 58)

Il est tout à fait remarquable d'observer que malgré son niveau technique et conceptuel élevé, cette algèbre arabe a manqué d'audace dans l'emploi des nombres négatifs et est restée essentiellement verbale. Cela montre en passant que le symbolisme littéral[22] n'a été indispensable ni à l'émergence de l'algèbre ni à ses premiers développements. Le langage utilisé par al-Khawarizmi pour représenter les concepts à la base de son algèbre (racine, māl, etc.), pour exposer sa démarche de résolution de problèmes et pour justifier ses algorithmes, bien qu'encore fort pesant, est tout aussi symbolique que le symbolisme littéral. Dans la revue de cette tranche de l'histoire de l'algèbre, nous avons

[22] L'utilisation des lettres pour représenter les nombres connus ou inconnus et de signes pour représenter les opérations.

remarqué que plus celle-ci progresse, plus les techniques utilisées se complexifient et plus le langage devient efficace.

Dans ce sens, les successeurs d'al-Khawarizmi utilisaient ce que Rashed (1984) appelle la «Méthode des tableaux», pour rendre possible l'exécution de toutes les opérations sur les polynômes. Le principe de cette méthode est simple: «on inscrit verbalement sur une première ligne les différentes puissances x^n, $n \in Z$. On marque les coefficients sur une deuxième ligne, sous la première, et, à propos de chaque opération, on prescrit un ensemble de règles qui permettent d'ajouter des lignes supplémentaires et de les déplacer» (*ibid.*). À titre illustratif, voici la méthode utilisée par al-Samaw'al, pour présenter une règle équivalente à $x^m x^n = x^{n+m}$; $n, m \in Z_+$.

> Il place de part et d'autre de x^0 les deux suites $x, x^2, \ldots, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots$, et son calcul de $x^n \frac{1}{x^{n'}}$; $n, n' \in Z_+$, consiste à compter à partir du rang n, n' rangs dans la direction de l'unité. Lorsqu'il s'agit du produit $x^n x^{n'}$, il compte également n' rangs mais dans la direction opposée à l'unité. Cette règle revient en fait à traiter les puissances de la forme $\frac{1}{x^{n'}}$ comme $x^{-n'}$ et à additionner algébriquement les puissances. Ainsi, après avoir dressé le tableau suivant:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	$1/x$	$1/x^2$	$1/x^3$	$1/x^4$	$1/x^5$	$1/x^6$	$1/x^7$	$1/x^8$	$1/x^9$
512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	½	¼	1/8	1/16	1/63	1/64	1/128	1/256	1/512
19683	6561	2187	729	243	81	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27	1/81	1/243	1/729	1/2187	1/6561	1/19683

> il écrit :
> «Si les deux puissances sont de part et d'autre de l'unité, à partir de l'une d'elles nous comptons en direction de l'unité, le nombre des éléments du tableau qui séparent l'autre puissance de l'unité, et le nombre est du côté

> de l'unité. Si les deux puissances sont du même côté de l'unité, nous comptons en direction opposée de l'unité.» (Rashed, 1984, p. 125)[23]

Rashed ajoute que c'est cette conception qui a rendu possible l'application des opérations de l'arithmétique élémentaire aux expressions algébriques de la forme

$$f(x) = \sum_{k=-m}^{n} a_k x^k \qquad m, n \in Z_+$$

et en particulier aux polynômes (*ibid.*).

Plus tard, les mathématiciens maghrébins[24] vont aller beaucoup plus loin et utiliser un système de notation symbolique algébrique basé sur l'usage de signes (une des lettres de l'orthographe en langue arabe du concept symbolisé) pour représenter les puissances de l'inconnue, les opérations arithmétiques et la relation d'égalité (voir figure 2.2). En mentionnant le caractère rhétorique de l'algèbre arabe, Arnaledez, Massignon et Youschkevitch précisent :

> En fait, ce n'est que dans les États maures[25] qu'ont été faits les premiers pas vers la création du symbolisme algébrique. On en trouve la trace dans l'ouvrage «Levée du voile de la science gubar» de al-Qalasadi, qui travaillait à Grenade avant l'effondrement du dernier émirat maure au sud de l'Espagne et mourut exilé en Afrique (1486). (Arnaledez, Massignon et Youschkevitch, 1966, p. 483)

En effet, le mathématicien andalou al-Qalasadi (mort à Tunis en 1486), désigne la racine carrée par la première lettre du mot *jidhr* (racine), placée au-dessus du nombre. Cette même lettre sert à désigner la grandeur inconnue (peut-être du fait qu'elle soit aussi la première lettre de *jahala*, ignorer) dans les règles de trois; la première puissance, le carré et la troisième puissance de l'inconnue sont désignées par les premières lettres des mots *chay'*, *mäl* et *ka'b*[26], ces signes apparaissent dans tous les cas au dessus des coefficients (Youschkevitch, 1976). On trouve aussi chez al-Qalasadi un signe qui

---

[23] On trouvera dans (Charbonneau et Lefevbre, 1992, p. 12, note 12) une autre description de cette règle.
[24] Mathématiciens de l'Afrique du nord (soit actuellement Mauritanie, Maroc, Algérie, Tunisie et Libye)
[25] États de l'Afrique du nord.
[26] Le mot *ka'b* signifie *cube*.

désigne l'égalité et qui, selon Youschkevitch, est vraisemblablement inspiré par la forme de la dernière lettre du mot '*adala* qui signifie égaler.

Il est intéressant d'observer qu'au moins un siècle avant al-Qalasadi, Ibn Qunfud, mathématicien maghrébin né en 1340, utilisait les mêmes notations (Lamrabet, 1981) dans son traité «Levée du voile sur les méthodes des opérations du calcul» datant de 1370. (Voir la figure 2.2).

Rappelons que les signes + et – sont apparus en Europe au XVème siècle, alors que le symbole × de la multiplication, le symbole √ de la racine carrée, le signe égalité =, la représentation des paramètres par des lettres, datent du XVIème siècle (Smith, 1958).

Notations d'Ibn Qunfud	Notations modernes
ج 3 Racine carré de 3	$\sqrt{3}$
م 3 Trois carrés	$3x^2$
م م 3 Trois carrés-carré	$3x^4$
ش 3 ou م 3 Trois racines	$3x$
ش 1 5 4 6 ou د ه ج 1 5 4 6 Cinq sixièmes et un quart d'un sixième de racine	$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{24}\right)x$
ك 3 Trois cubes	$3x^3$
ل	= (égalité)
م ش ش م 6 2 3 ل 3 4 5 Cinq carrés, quatre racines et trois nombres égaux à trois racines, deux carrées et six nombres	$5x^2+4x+3=3x+2x^2+6$
في	× ou . (multiplication)
م م ك م ك م ش 10 54 20 ل 5 2 في 2 10 Dix et deux racines multiplier par deux carrés et 5 cubes égaux à dix carrés carrés, 54 cubes et 20 carrés	$(10+2x)(2x^2+5x^3)=20x^2+54x^3+10x^4$
لا	− (moins)
ش م 2 لا 4 ل 2 لا 5 5 moins deux carrés égaux à quatre moins deux racines	$5-2x^2=4-2x$

Figure 2.2 : Système de notation utilisé par Ibn Qunfud

En passant, il convient de souligner le rôle central du développement du calcul algébrique non seulement dans le développement de l'algèbre elle-même, mais également dans le développement et l'éclosion d'autres parties des mathématiques.

2.5.4 Cardan et l'application du calcul algébrique à de nouveaux domaines de nombres

La quatrième étape du développement historique de l'algèbre que nous retenons est marquée par l'élargissement du domaine d'application du calcul algébrique en y intégrant une nouvelle catégorie de nombres.

La recherche de règles générales pour la résolution algébrique — c'est-à-dire au moyen des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de l'extraction de racines carrées ou cubiques — de l'équation du troisième degré, allait conduire les algébristes italiens du XVIème siècle à raisonner sur des nombres dits imaginaires, une nouvelle catégorie de nombres. Les trois pionniers dans ce domaine sont Scipione del Ferro, Tartaglia et Cardan (Itard, 1977). En langage moderne, la solution trouvée pour l'équation $x^3 + px + q = 0$ est la suivante :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Cardan a vite compris les difficultés soulevées par cette équation. Lorsque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est négatif, la racine carrée de ce nombre ne peut pas être calculée dans R. Or dans ce cas, on sait que l'équation possède trois racines, comme Archimède l'avait montré géométriquement dans son livre *De la sphère et du cylindre, livre second* où un problème de solides est mathématisé par l'équation en question (Itard, 1977). En acceptant de calculer sur des racines carrées de nombres négatifs, Cardan utilisait un artifice de calcul lui permettant de trouver trois racines pour cette équation. Pour lever la difficulté, il introduisit timidement – Bombelli le fera plus nettement en 1572 – de nouveaux nombres dits «impossibles» ou «imaginaires».

À titre d'exemple, pour l'équation $x^3 - 63x - 162 = 0$ (équation dite irréductible) la formule de Cardan donne : $x = \sqrt[3]{81+30\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{81-30\sqrt{-3}}$

laquelle, après simplification donne : $x = \left(-3 + 2\sqrt{-3}\right) + \left(-3 - 2\sqrt{-3}\right) = -6$.

En acceptant d'appliquer à $\sqrt{-3}$ les opérations de base habituelles et en supposant que les propriétés de ces opérations restent aussi valides pour ces nouveaux «objets», Cardan arrive à trouver une solution réelle de l'équation cubique. Le raisonnement heuristique de Cardan est manifestement de nature «analytique». Cependant, dans ce cas, Cardan n'opère pas sur un objet (un nombre) dont la valeur est temporairement inconnue ni sur une variable dont le domaine de référence est connu, mais plutôt sur des «objets imaginaires». Plus tard, grâce notamment à Bombelli, ces objets seront considérés comme des nombres à part entière, qui en se combinant avec les nombres réels, permettent d'obtenir l'ensemble C des nombres complexes.

Encore ici apparaît la relation dialectique entre le calcul algébrique et les extensions des systèmes de nombres. Comme le fait remarquer Chevallard : «D'une part, en effet, les systèmes de nombres fournissent les domaines de calcul sur la base desquels s'élèvera le calcul algébrique (...). Mais, d'autre part, le calcul algébrique constituera le mobile essentiel, et l'outil fondamental de la construction des systèmes de nombres successifs.» (Chevallard, 1989b, p. 50). Il ajoute plus loin « (...) à un moment donné, on dispose de très peu de nombres [dans un système de nombres] pour qu'en résulte un calcul algébrique "agréable". D'où le passage aux nombres négatifs puis aux nombres rationnels et, plus tard aux nombres complexes par le prolongement de R dans C» (*ibid.*, p. 52).

En fait, le passage d'un système de nombres S à un système de nombres S' plus grand consiste à adjoindre à S les solutions de certaines équations polynomiales à coefficients dans S en étendant à S' les règles de calcul dans S. Ainsi, l'ensemble des entiers relatifs Z est obtenu en adjoignant à l'ensemble des entiers naturels les «nombres» solutions des

équations de la forme $x + a = b$, où a et b sont entiers naturels avec $a \geq b$. Le passage de Z à l'ensemble des nombres rationnels Q est régi quant à lui par les équations de la forme $ax = b$, a étant un entier naturel non nul et b un entier relatif non multiple de a. De même le passage de Q à $Q(\sqrt{2})$, ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont des nombres rationnels et b non nul, est régi par les équations équivalentes à $(x - a)^2 = 2b^2$. Ces nouveaux nombres permettent d'étendre les domaines d'emploi du calcul algébrique ; ils sont justement qualifiés d'algébriques car ils sont solutions – algébriques, c'est-à-dire obtenues par radicaux, comme disaient les mathématiciens arabes – d'équations polynomiales à coefficients rationnels[27].

Une question surgit : peut-on continuer ainsi à créer de nouveaux systèmes de nombres englobant les précédents et obéissant aux mêmes règles de calcul ?

Tout d'abord, à la condition de conserver les propriétés essentielles des opérations de l'algèbre ordinaire, par exemple la propriété de la commutativité de la multiplication, l'ensemble des nombres algébriques[28], noté $\overline{Q}$, est nécessaire et suffisant pour donner à l'algèbre élémentaire toute son extension. D'autre part, si l'on essaie de créer, à partir de $\overline{Q}$, de nouveaux nombres obéissant aux lois du calcul algébrique, le système obtenu est identique à celui des nombres algébriques[29]; *le nombre algébrique est donc l'élément essentiel et universel de l'algèbre.*

---

[27] En langage moderne un nombre est dit algébrique s'il peut être racine d'une équation polynomiale à coefficients dans Z (ou dans Q, ce qui revient au même). Dans les manuels d'algèbre anciens, l'expression nombre algébrique est utilisée pour désigner les entiers relatifs négatifs. Il semble, selon Chevallard, que cette tradition remonte à Euler.

[28] Soit l'ensemble des nombres pouvant être solution d'équations polynomiales à coefficients dans Z. Cet ensemble est plus grand que Q mais plus petit que C. Les nombres comme e et π qui ne sont pas algébriques sont dits transcendants. On dit que $\overline{Q}$ constitue la clôture algébrique de Q, muni des opérations d'addition et de multiplication étendues à partir de Q, il possède la structure de corps.

[29] Autrement dit, en langage savant, l'ensemble des nombres algébriques est «algébriquement clos», c'est-à-dire que tout polynôme non constant de $\overline{Q}[X]$ se décompose dans $\overline{Q}[X]$ en un produit de polynômes du premier degré. Il s'ensuit que tout polynôme à coefficients dans $\overline{Q}$ possède toutes ses racines dans $\overline{Q}$.

Dans ce sens, *en algèbre élémentaire, on peut se contenter d'un système de nombres ne contenant pas les nombres transcendants.* Toutefois, à cause de l'usage des nombres pour mesurer des grandeurs, continues, on a besoin d'adjoindre aux rationnels des nombres transcendants comme π, et donc de travailler dans le système des nombres réels dont la clôture algébrique est cette fois-ci l'ensemble des nombres complexes. La transcendance n'est pas une propriété algébrique (nous reviendrons sur ce point plus tard).

Pour respecter l'ordre chronologique du développement de l'algèbre, examinons maintenant l'algèbre de Viète, considérée par certains auteurs (Chevallard, par exemple), mais à tort selon nous, comme étant le véritable commencement de l'algèbre.

2.5.5 Viète et le développement du symbolisme algébrique

La cinquième étape que nous avons identifiée dans le développement historique de l'algèbre est marquée par la création du symbolisme algébrique. Il a fallu beaucoup de temps dans l'histoire pour que ce dernier arrive à sa forme moderne, telle qu'on la connaît aujourd'hui. Le pas décisif a été accompli par François Viète qui, en 1591, a introduit l'usage des lettres pour désigner aussi bien les grandeurs inconnues que les grandeurs connues. Le système de notation a été par la suite parfait par Descartes et adopté par l'ensemble des mathématiciens.

Dans son «Introduction à l'art analytique» Viète définit l'algèbre comme une méthode d'analyse comportant trois étapes : l'analyse zététique, l'analyse porisitique et l'analyse rhétique ou exégétique :

> Il se rencontre dans les mathématiques une certaine manière et façon de rechercher la vérité, laquelle on dit avoir été premièrement inventée par Platon, que Theon a appelée analyse, et par lui définie la supposition de ce que l'on cherche, comme s'il était concédé pour parvenir à une vérité cherchée, et ce par le moyen des conséquences; comme au contraire la synthèse est la supposition d'une chose concédée pour parvenir à la connaissance de ce que l'on cherche par le moyen des conséquences. Et combien que les anciens ayant proposé deux sortes d'analyse, à savoir la Zététique et la Porisitique, auxquelles la définition de Theon convient principalement; toutefois il est à propos d'en établir encore une troisième

> espèce, qui soit appelée Rhétique, ou Exégétique : donc la Zététique est celle par laquelle se trouve l'égalité, par le moyen de la proportion qui est entre la grandeur que l'on cherche, à celle qui est donnée. La Porisitique est celle par laquelle on examine la vérité d'un théorème déjà ordonné, par le moyen de l'égalité ou proportion. L'Exégétique est celle par laquelle on trouve la quantité ou grandeur cherchée, par le moyen de l'égalité ou proportion déjà ordonnée. Par ainsi l'art analytique entier exerçant ces trois offices, peut être défini la doctrine de bien inventer en mathématiques. (François Viète, édition française de 1630, orthographe modernisé, cité dans Chevallard, 1989, pp. 31-32)

L'historien Itard nous explique en langage moderne en quoi consistent les trois types d'analyse dont parle Viète :

> La *zététique* consiste à adopter un symbolisme permettant de noter tant les grandeurs inconnues que les grandeurs connues, à exprimer les liens qui les unissent et à dégager l'équation qui, sous forme abstraite, résume le problème posé. L'*analyse poristique* étudie, transforme, discute cette équation. Enfin l'*exégétique*, ou *analyse rhétique*, revenant au problème concret, résout l'équation, soit par des constructions s'il s'agit de géométrie, ou par des calculs s'il s'agit d'arithmétique. (Itard, 1977, p. 245)

Viète disait avoir créé une nouvelle algèbre où le calcul est réalisé sur des "espèces", c'est-à-dire des nombres non spécifiés (*logistica speciosa*) en opposition à un calcul essentiellement numérique (*logistica numerosa*) (Kline, 1962). Il décrit explicitement les différents types d'espèces et les propriétés des opérations sur eux (Charbonneau et Lefebvre, 1982). Ces deux auteurs précisent :

> Dans ses manipulations, contrairement à ses prédécesseurs, il [Viète] ne fait aucune distinction entre les espèces représentant des grandeurs connues et celles représentant des grandeurs inconnues, si ce n'est de représenter celles-là par des consonnes et celles-ci par des voyelles. (Charbonneau et Lefebvre, 1982, p. 13).

Avant Viète, le calcul algébrique était un calcul sur des équations et sur les expressions polynomiales correspondantes où, contrairement aux paramètres qui restaient numériques, seule l'inconnue était représentée par un symbole. Ce «symbolisme» n'était pas immédiatement opérationnel; il était toutefois utile parce que sa concision permettait de retenir facilement les étapes de résolution, au moins en ce qui concerne l'inconnue (Charbonneau et Lefebvre, 1982). Avec Viète, le calcul algébrique devenant un calcul littéral (*logistica speciosa*), c'est-à-dire un calcul avec des lettres, l'algèbre se dote

d'une "épaisseur syntaxique". Cet apport de Viète constitue une avancée fondamentale dans le développement de l'algèbre. En représentant par des symboles même les coefficients d'une équation, le calcul littéral présente alors le principal avantage de traiter le cas général et non les cas particuliers et, de ce fait même, de s'intéresser à la structure des problèmes plutôt qu'à leurs expressions. Mettant l'emphase sur la forme du calcul, il permet de garder une trace des transformations que subit une expression algébrique. Aussi, «il nous fait raisonner à peu de frais, en mettant des caractères à la place des choses, pour désembarrasser l'imagination. De plus, il laisse à notre disposition des formules toutes faites, qui nous dispensent de recommencer chaque fois notre travail.» (Leibniz, cité dans Chevallard, 1989a, p. 30).

Sans prétendre expliquer les raisons derrière la création du symbolisme algébrique de Viète, il nous semble que la tendance à penser analytiquement et à chercher des méthodes générales renforce la tendance à symboliser. En effet, pour pouvoir opérer sur l'inconnue, l'absence de sa valeur numérique oblige à la nommer et à la représenter par un symbole. Dans le calcul algébrique obtenu – calcul sur des équations et sur les expressions polynomiales correspondantes – la manipulation des expressions où figure un symbole sans détermination numérique permet non seulement de trouver la valeur de l'inconnue, mais aussi de présenter des procédés généraux de calcul et de résolution d'équations. Dans cette ligne de pensée, et pour tirer pleinement profit de cet avantage, en «masquant» la détermination numérique des grandeurs connues (les paramètres de l'équation) par des symboles, les étapes de la résolution de l'équation conviennent à une large classe de problèmes et non à un cas particulier. Viète utilise les voyelles pour les inconnues – dont on cherche la valeur – et les consonnes pour les quantités connues – dont on oublie la valeur !

2.5.6 Hamilton et l'extension du calcul algébrique à de nouveaux domaines de calcul

La sixième étape du développement historique de l'algèbre que nous avons retenue est marquée par la création de nouveaux espaces de calcul dont la structure algébrique est différente de celle des systèmes de nombres usuels. Dans la section 2.5.4, nous avons expliqué que les extensions successives des systèmes de nombres conservant les règles et les propriétés du calcul algébrique, tel qu'il a été élaboré sur la base de l'arithmétique élémentaire, atteignent un seuil limite avec le corps des nombres algébriques (ou le corps des nombres complexes si l'on considère le système des nombres réels comme étant déjà construit). Tout autre système de nombres plus général ne peut avoir les mêmes propriétés ni obéir aux mêmes règles de calcul algébrique. Pendant quinze ans, Hamilton s'est efforcé d'élaborer une algèbre (celle des quaternions) qui lui permettrait de résoudre certains problèmes en mécanique et dans d'autres chapitres de la physique, mais il a buté sur la propriété de la commutativité de la multiplication. Son génie fut alors de rejeter «simplement» cette propriété et d'accepter que a fois b ne soit pas nécessairement égal à b fois a (Bell, 1940, p. 49). Par ce pas de côté, Hamilton ouvrit la voie à des structures algébriques non essentiellement numériques, et libéra ainsi définitivement l'algèbre de l'emprise de l'arithmétique. Expliquons avec plus de détails l'idée de Hamilton.

Rappelons que l'addition et la multiplication de nombres complexes se définissent ainsi, i étant le symbole satisfaisant à $i^2 = -1$:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$
$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

ou encore, en représentant un nombre complexe $a + ib$ par la paire ordonnée de nombres réels (a, b), de la façon suivante:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Ces opérations satisfont aux propriétés usuelles des opérations d'addition et de multiplication sur les nombres réels. À l'image de la construction du système des nombres complexes à partir de celui des réels, Hamilton a défini une nouvelle catégorie de nombres comme étant des paires ordonnées de nombres complexes de la forme $(a+ib\ ,\ c+id)$, c'est-à-dire essentiellement des quadruplets de nombres réels (a, b, c, d), qu'il a appelés par la suite des «quaternions». Il a tenté de définir sur eux une addition et une multiplication satisfaisant aux propriétés usuelles de fermeture, d'associativité, de commutativité et de distributivité. Après une quinzaine d'années de réflexion sur le sujet, il est arrivé à la conclusion qu'il était impossible de créer un tel système qui satisfasse à la fois à ces propriétés arithmétiques et aux exigences de la physique (Kramer, 1970). Finalement, en 1843, il réussit à définir un système des quaternions logiquement cohérent mais dont la multiplication n'est pas commutative[30].

À la suite de Hamilton, d'autres mathématiciens ont essayé de généraliser encore davantage le concept de nombre. Cayley (1821-1895) par exemple, a défini des nombres hypercomplexes comme étant des paires ordonnées de quaternions, donc essentiellement des octuplets de nombres réels, mais le système qu'il a obtenu n'obéit pas à des propriétés fondamentales de l'algèbre traditionnelle, à savoir la commutativité et l'associativité de la multiplication (Kramer, 1970).

Hamilton parle de l'algèbre comme étant «la science du temps pur». Il part de l'hypothèse qu'il en existe trois conceptions différentes : une à caractère «pratique», où

---

[30]Hamilton définit un quaternion comme étant de la forme $a + bi + cj + dk$, où a, b, c et d sont des nombres réels; i, j et k sont définis par les relations: $i^2 = -1$; $j^2 = -1$ et $k^2 = -1$ et leur multiplication par le tableau suivant:

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

On peut remarquer en particulier que $ij \neq ji$, $ik \neq ki$ et $jk \neq kj$. Il est aussi aisé de vérifier que l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$ contient les quaternions $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}j + \frac{1}{2}\sqrt{2}k$ ainsi qu'une infinité d'autres solutions. On s'aperçoit ainsi que le théorème fondamental de l'algèbre n'est pas valable dans l'algèbre des quaternions.

elle est considérée comme étant purement instrumentale; une autre à caractère «philologique», où elle est envisagée comme un calcul pur orienté selon la symétrie des expressions; une troisième à caractère «théorique» (Jahnke et Otte, 1981), qu'il s'est lui-même proposé de développer :

> In all mathematical science we consider and compare relations. In algebra, the relations which we first consider and compare, are relations between successive states of some changing thing or thought. And numbers are the names or nouns of algebra: marks or signs, by which one of these successive states may be remembered and distinguished from another. (...) relations between successive thoughts thus viewed as successive states of one more general and changing thought are the primary relations of algebra. (...) For with Time and Space we connect all continuous change, and by symbols of Time and Space we reason on and realize progression. Our marks of temporal and local site, our then and there are at once signs and instruments of that transformation by which thoughts become things, and spirit puts on body, and the act and passion of mind seem clothed with an outward existence, and we behold ourselves from afar. And such a transformation there is when in Algebra we contemplate the change of our own thoughts as if it were the progression of some foreign thing and introduce numbers as the marks or signs to denote place in that progression.» (Hamilton, Cité dans Jahnke et Otte, 1981, p. 34)

Selon Kramer (1970), Hamilton est souvent considéré comme le fondateur de l'*algèbre abstraite* moderne parce qu'il a été le premier à créer une algèbre non traditionnelle. Toutefois, l'idée de traiter l'algèbre comme une science pure déduite d'un système de postulats n'a été développée que graduellement par la suite par les membres de l'école Britannique d'algèbre, notamment, Georges Peacock (1791-1858) et Georges Boole (1806-1871).

2.5.7 Galois et l'introduction des structures algébriques

La septième étape du développement historique de l'algèbre que nous avons retenue est marquée par l'introduction en algèbre des *structures algébriques*, c'est-à-dire des *ensembles munis d'opérations et de relations obéissant à un certain nombre de règles* (pour la plupart inspirées initialement des systèmes de nombres), par exemple de la structure de corps (dont les ensembles Q, R et C munis de l'addition et de la multiplication constituent des

exemples) et de la structure de groupe (dont les isométries du plan constituent un exemple).

Après Descartes, l'algèbre est devenue, grâce à son symbolisme, un outil puissant non seulement pour la résolution de problèmes, mais aussi dans la recherche de divers types de généralisations (formules, propositions générales, etc.). Par analogie avec le cas des équations polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4, les algébristes ont longtemps pensé pouvoir trouver une formule générale donnant toutes les solutions d'une équation de degré supérieur à 4 à l'aide des quatre opérations élémentaires et des radicaux. «Par un hasard de l'histoire des sciences, les tentatives pour établir cette conjecture, pourtant mathématiquement saugrenue, allaient conduire à dégager les premières structures abstraites et être à l'origine de l'algèbre moderne» (Itard, 1977).

Leibniz explique l'état de l'algèbre après Descartes, montrant les obstacles qui se dressaient devant les algébristes à cette époque:

> L'algèbre est encore (...) imparfaite, quoi qu'il n'y ait rien de plus connu que les idées dont elle se sert, puisqu'elles ne signifient que des nombres en général; car le public n'a pas encore le moyen de tirer les racines irrationnelles d'aucune équation au-delà du quatrième degré (excepté dans un cas fort borné); et les méthodes dont Diophante, Scipion du Fer et Louis de Ferrare se sont servis respectivement pour le second, troisième et quatrième degré, afin de les réduire au premier ou afin de réduire une équation à une pure, sont toutes différentes entres elles, c'est-à-dire celle qui sert pour un degré, diffère de celle qui sert pour l'autre. Car le second degré ou de l'équation carrée se réduit au premier, en ôtant seulement le second terme. Le troisième degré, ou de l'équation cubique, a été résolu parce qu'en coupant l'inconnue en parties, il en provient heureusement une équation du second degré. Et dans le quatrième degré ou des biquadrates, on ajoute quelque chose des deux côtés de l'équation pour la rendre extrayable de part et d'autre; et il se trouve encore heureusement que pour obtenir cela on n'a besoin que d'une équation cubique seulement. Mais tout cela n'est qu'un mélange de bonheur ou de hasard avec l'art ou méthode. Et en le tentant dans ces deux derniers degrés, on ne savait pas si l'on réussirait. Aussi faut-il encore quelque autre artifice pour réussir dans le cinquième ou sixième degré (...). (Rapporté par Brunschvicg, 1912, p. 551)

Vers 1824, Abel démontra qu'il état impossible de trouver une solution générale à l'équation du cinquième degré, qui puisse s'exprimer à l'aide des quatre opérations élémentaires et des radicaux. Mais, c'est à Galois que revient le mérite d'en donner les conditions nécessaires et suffisantes. Son idée fut de faire correspondre à toute équation algébrique un certain *groupe* de permutations de ses racines. Ce groupe attaché à l'équation reflète les propriétés caractéristiques de cette dernière et donne le moyen de saisir les conditions qui en permettent la résolubilité. Galois a ainsi mis en évidence une première structure algébrique, soit celle de groupe.

La découverte de Galois ouvrit grande la voie à la période moderne de l'algèbre.

> À priori, écrit M. Couturat, il n'y a rien de commun entre la résolution algébrique d'une équation et la décomposition d'un groupe en sous-groupes invariants. Il a fallu le génie de Galois pour apercevoir une analogie entre ces deux processus intellectuels si divers, et pour découvrir des relations aussi fécondes qu'inattendues entre la science du nombre et la science de l'ordre. (Cité dans Brunschvicg, 1912 , pp. 556-557).

Notons aussi que l'idée d'*adjonction*, une autre idée utilisée par Galois, s'est révélée très féconde par la suite en algèbre. Ainsi, le polynôme

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = \left[x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\left[x^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x - \left(\frac{+1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \quad (1)$$

qui est irréductible sur le corps Q devient réductible sur le corps $Q(\sqrt{5})$ obtenu en adjoignant le nombre $\sqrt{5}$ à Q et dont les éléments sont de la forme: $a + b\sqrt{5}$ (avec a et b dans Q). En effet, l'ensemble Q ne possède pas assez d'éléments pour que la décomposition en facteurs indiquée dans le membre de droite de (1) puisse s'effectuer; son élargissement à l'ensemble de nombres $Q(\sqrt{5})$ rend cette décomposition possible. Cette idée illustre la dialectique entre les extensions successives des systèmes de nombres et le calcul algébrique que nous avons soulignée précédemment.

2.5.8 L'apparition de l'algèbre moderne

La huitième et dernière étape du développement historique de l'algèbre que nous avons retenue se distingue par l'apparition de l'algèbre moderne.

Dans l'introduction de son livre sur l'algèbre, Bourbaki retrace

> (..) le lent processus d'abstraction progressive par lequel la notion d'opération algébrique, d'abord restreinte aux entiers naturels et aux grandeurs mesurables, a peu à peu élargi son domaine, à mesure que se généralisait parallèlement la notion de «nombre», jusqu'à ce que, dépassant cette dernière, elle en vint à s'appliquer à des éléments qui n'avaient plus aucun caractère «numérique», par exemple aux permutations d'un ensemble. C'est sans doute, la possibilité de ces extensions successives, dans lesquelles la forme des calculs restait la même, alors que la nature des êtres mathématiques, en eux-mêmes, importe peu : ce qui compte, ce sont leurs relations.» (Bourbaki, 1970).

Contrairement au cas de l'algèbre classique, la date de la naissance de l'algèbre moderne est relativement précise. Selon Queysanne et Delachet, en effet :

> Les algébristes contemporains s'accordent pour situer la date de naissance de l'algèbre moderne en 1910, avec le mémoire de Steinitz sur la Théorie algébrique des corps : c'est la première fois que se trouve abordée systématiquement l'étude d'opérations portant sur des êtres essentiellement abstraits, c'est-à-dire qui ne sont plus les objets, nombres ou figures de l'arithmétique, de l'algèbre ou de la géométrie classiques. Mais cette naissance a été précédée d'une période de gestation de plus d'un siècle. (Queysanne et Delachet, 1960, p. 2)

Pour définir une structure algébrique, il suffit d'avoir un ensemble quelconque d'objets (représentés par des lettres) muni d'opérations satisfaisant à certaines règles déterminées (celles-ci constituent en quelque sorte des axiomes définissant la structure). Des mathématiciens comme Gauss et surtout Galois, ont montré la fécondité d'étudier certains types spécifiques de structures algébriques, par exemple celle de groupe. Néanmoins, une grande part de l'algèbre moderne étudie divers types de structures algébriques ayant des applications intéressantes en mathématiques ou dans d'autres disciplines scientifiques. L'*algèbre moderne* est parfois appelée *algèbre abstraite* parce que ses objets atomiques ne supportent aucune charge sémantique ; ce qui compte dans la

conduite du calcul algébrique ce sont uniquement les axiomes ou règles que les opérations doivent satisfaire.

Nous n'allons pas relater ici, même pas très sommairement, l'évolution historique de l'algèbre moderne, tant elle est riche, atteignant un haut niveau de complexité et s'irradiant en d'innombrables directions. Dans le chapitre suivant, nous aurons l'occasion d'illustrer quelques types d'activités qui lui sont propres.

2.6 CONCLUSION

La première grande étape que nous avons retenue est celle du début de l'algèbre en tant que discipline mathématique indépendante. Au cours de cette période, l'algèbre apparaît comme la théorie des équations linéaires et quadratiques à une seule inconnue, et du calcul élémentaire sur les binômes et trinômes associés (calcul algébrique), sans que soit encore formulée l'idée de polynôme en général. Dans la seconde grande étape de l'évolution de l'algèbre, celle-ci apparaît comme une arithmétique des inconnues, où on assiste à la constitution de l'algèbre des polynômes. Le calcul algébrique se trouve alors prolongé en un calcul sur les expressions polynomiales à coefficients rationnels positifs. Dans la troisième étape, l'algèbre apparaît comme la théorie des équations algébriques où on note une grande influence du courant géométrique. La quatrième période retenue est marquée par l'élargissement du domaine d'application du calcul algébrique à de nouvelles catégories de nombres. En la décrivant, nous avons noté la relation dialectique entre le développement du calcul algébrique et les extensions successives de systèmes de nombres ainsi que le rôle moteur de la pensée analytique dans le développement de l'algèbre. Durant la cinquième étape, le calcul algébrique acquiert une épaisseur syntaxique qui augmente considérablement sa puissance. L'idée clé, celle consistant à noter par des lettres même les nombres connus est manifestement de nature analytique. Mais, en comparaison avec l'idée sous-tendant la représentation de l'inconnue par une lettre, le courant s'inverse. En effet, au lieu d'opérer sur une inconnue comme si elle était connue, on opère sur une quantité connue comme si elle

était inconnue ! L'algèbre devient une sorte d'arithmétique avec des lettres qui représentent des quantités arbitraires. Jusque là, on opérait sur des grandeurs connues ou inconnues selon des règles fixes et bien définies, à l'image de celles régissant les systèmes classiques de nombres. Dans la sixième étape retenue, on voit apparaître des algèbres non traditionnelles, dans le sens où les propriétés des opérations ne satisfont plus au même système de règles que celles des systèmes de nombres classiques (entiers, rationnels, réels ou complexes). Durant la septième étape, on voit apparaître la notion de structure algébrique. Les algébristes commencent à comprendre qu'en algèbre, ce sont les propriétés des opérations qui comptent et non la nature des objets sur lesquelles elles sont définies. Dans la huitième étape, la signification de l'algèbre qui domine est celle de l'étude de structures algébriques. Le calcul algébrique signifie alors un calcul sur des expressions symboliques qui n'ont aucune ontologie et dont les règles de calcul sont basées sur les axiomes définissant une structure algébrique.

Cette revue du développement historique de l'algèbre va nous servir de référence pour mener une réflexion sur les caractéristiques de l'algèbre et de la pensée algébrique dans les chapitres 3 et 4.

Notons enfin que la classification de l'évolution historique de l'algèbre de Nesselman, que nous avons présentée dans 2.2, est insuffisante pour les fins de notre travail pour deux raisons.

D'abord parce que cette classification ne met pas en évidence des étapes importantes du développement de l'algèbre. En faisant le vide entre Diophante et Viète (s'étalant sur près de 13 siècles), elle ne permet pas d'expliquer d'où provient cette maturité de l'algèbre à l'époque de Viète, notamment à travers le développement technique du calcul algébrique, du développement de l'algèbre des polynômes, de la théorie des équations algébriques, etc. En outre, en ne prévoyant aucune étape après Viète, elle ne fait allusion ni à l'apparition d'algèbres non traditionnelles, comme celles d'Hamilton ou de Cayley, ni à l'algèbre moderne, celle de l'étude de structures algébriques.

Ensuite parce que, s'appuyant sur cette classification, certains auteurs placent l'algèbre arabe dans la phase rhétorique et celle de Diophante dans la phase syncopée de l'évolution de l'algèbre. Ainsi, Kieran (1992) reprend cette interprétation de l'évolution historique de l'algèbre et avance dans son article synthèse sur les recherches en didactique de l'algèbre:

> It is to be noted that the syncopated symbolism introduced by Diophantus did not develop to any great extent until the turn of the 17th century. After the Moslem conquest of the 7th century, Arab mathematicians kept alive Greek and Hindu mathematics, but their algebra was primarily rhetorical. This style continued in the century that followed, during which time Arabic algebra was transmitted to Europe. (Kieran, 1992, p. 391)

Cette interprétation invite rapidement à penser que «l'algèbre» de Diophante surclasse celles d'al-Khawarizmi, d'al-Karaji et d'al-Khayyām toutes réunies ! Nous n'allons pas nous attarder à commenter l'idée communément admise, quoi que de plus en plus réfutée notamment en histoire des sciences, que la culture grecque a transité par les savants arabes jusqu'au Moyen Âge occidental et que dans ce transfert, les arabes n'ont été qu'une simple «courroie de transmission» dont le seul mérite a été de sauvegarder intact l'héritage hellénistique. Une telle affirmation est d'autant plus étonnante dans le cas de l'algèbre où les apports d'al-Khawarizmi et d'al-Khayyām, en particulier, sont généralement suffisamment connus.

Chapitre 3

Un modèle intégrateur de l'algèbre et de la pensée algébrique

3.1 INTRODUCTION

Dans ce troisième chapitre, nous poursuivons la présentation du cadre conceptuel de notre thèse, en menant une réflexion sur les principales caractéristiques de l'algèbre et de la pensée algébrique. Dans la section 3.2, nous expliquons pourquoi il nous apparaît important d'insister sur les deux à la fois. Dans les sections 3.3 et 3.4, nous présentons les principales caractéristiques de l'algèbre et de la pensée algébrique respectivement, chaque fois après avoir précisé le sens de certains termes fréquemment utilisés. Ensuite, dans la section 3.5, nous présentons un modèle intégrant l'algèbre et la pensée algébrique. Enfin, dans la section 3.6, nous comparons notre modèle avec les points de vue d'autres auteurs.

3.2 IMPORTANCE D'INSISTER À LA FOIS SUR L'ALGÈBRE ET SUR LA PENSÉE ALGÉBRIQUE

Les mathématiques peuvent être considérées comme une science toute faite, c'est-à-dire un ensemble de connaissances déjà bien organisées, ou encore comme une science en train de se faire, c'est-à-dire comme une activité humaine. Selon cette seconde perspective, qui est celle que nous préférons nettement, l'algèbre, l'arithmétique et la géométrie, par exemple, sont des types particuliers d'activités mathématiques. Une personne qui s'y engage a en tête un objectif qui oriente le déroulement de son activité, par exemple la résolution d'une équation, la formulation d'une conjecture à partir de l'examen de quelques cas particuliers, la comparaison de deux structures, le calcul de la valeur d'une intégrale, la recherche du lieu des points géométriques ayant certaines propriétés, l'estimation du cardinal d'un ensemble de nombres entiers naturels satisfaisant à certaines propriétés, etc. Pour atteindre cet objectif, elle réalise une chaîne de tâches qu'un observateur externe expert peut interpréter comme la manipulation de symbolisme mathématique, la représentation graphique d'une relation fonctionnelle,

etc. En même temps, elle exerce certaines habiletés[31] intellectuelles comme généraliser, abstraire, faire des analogies, justifier, etc.

Une première raison d'insister à la fois sur l'algèbre et sur la pensée algébrique, est que nous voulons décrire à la fois les caractéristiques principales de l'algèbre vue en tant que type particulier d'activités mathématiques, que les principales habiletés intellectuelles qui y sont utilisés.

Une deuxième raison émane de notre conception des mathématiques et de notre vision constructiviste de l'enseignement et de l'apprentissage. En effet, pour nous, le savoir mathématique est un produit de l'activité humaine et les mathématiques sont à la fois une activité ainsi et ses produits. L'apprentissage des mathématiques ne consiste pas en l'accumulation progressive d'habiletés et de parcelles d'informations isolées les unes des autres (faits, règles, théorèmes, etc.), il est plutôt un processus d'acquisition de sens, qui suppose que l'apprenant soit engagé dans des activités mathématiques (ou dans celles qui nécessitent leur utilisation) lui permettant de construire son savoir. Il est alors important de faire en sorte qu'il développe des habiletés intellectuelles qui sont essentielles dans de telles activités. Dans ce sens, il est important de mettre en évidence à la fois le type d'activités que l'on fait en algèbre ainsi que les habiletés intellectuelles qui s'y exercent.

Une troisième raison est que le fait de mettre l'accent à la fois sur l'algèbre et sur la pensée algébrique sonde une nouvelle voie dans la construction de curriculums de mathématiques non encore sérieusement exploitée à notre connaissance. Jusqu'à présent, en effet, la plupart des curriculums de mathématiques – notamment ceux de «mathématiques modernes» et ceux qui en sont dérivés – ont été bâtis suivant

---

[31] Nous préférons utiliser le terme *habileté* plutôt que celui de *capacité*, le second étant général et moins précis que le premier. Selon le DICTIONNAIRE ACTUEL DE L'ÉDUCATION, en effet, «la capacité a plus rapport à l'étendu des aptitudes et des connaissances; l'habileté à l'application, à la pratique. L'habileté est une capacité poussée à son degré de perfection, et ce, dans un champ spécifique d'activité».

l'hypothèse que les mathématiques scolaires doivent être organisées hiérarchiquement selon la logique propre de la discipline mathématique.

En conclusion, l'algèbre et la pensée algébrique sont pour nous complémentaires et indissociables l'une de l'autre, ce qui d'ailleurs sera bien manifeste dans le modèle que nous proposerons dans la section 3.5 pour les intégrer.

3.3 PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES DE L'ALGÈBRE

Notre étude du développement historique de l'algèbre dans le précédent chapitre a mis en évidence le fait que l'algèbre a connu de multiples changements dans ses objets, ses concepts et ses méthodes. Faut-il rappeler que même la signification du mot «algèbre» elle-même a varié : désignant à son début une procédure (*al-jabr*, i.e. transposition), le terme «algèbre» a fini par désigner une structure algébrique (une algèbre); entre-temps Viète a proposé de l'appeler «analyse», en référence à l'importance que la méthode analytique joue en algèbre. Dans cette section, nous présentons les caractéristiques essentielles de l'algèbre.

Notre objectif ici n'est pas de donner une définition de l'algèbre[32], mais d'identifier les aspects importants de l'algèbre en tant qu'un type particulier d'activités mathématiques ainsi que les processus de pensée essentiels dans ces activités.

Dans le modèle intégrateur que nous allons proposer plus loin, il est souhaitable d'utiliser, dans la mesure du possible, un petit nombre de composantes pour caractériser l'algèbre. Ces composantes devront permettre d'expliquer les aspects importants de l'algèbre déjà mis en évidence dans le chapitre 2. De plus, elles devront s'intégrer de façon harmonieuse avec les composantes que nous retiendrons par la suite pour caractériser la pensée algébrique. En réfléchissant à ces deux conditions et après avoir fait plusieurs essais, nous avons retenu les trois aspects essentiels de l'algèbre

suivants : 1) *la construction et l'interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques* ; 2) *la manipulation d'expressions algébriques en suivant des règles prédéfinies* et 3) *l'élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.).* Nous les présenterons successivement, un peu plus loin dans cette section. Auparavant, il convient que nous nous arrêtions brièvement pour préciser un certain nombre de termes que nous aurons besoin d'utiliser fréquemment dans la suite.

3.3.1 Précisions sur la terminologie utilisée

3.3.1.1 Les notions d'opération, de système algébrique et d'expression algébrique

On appelle *loi de composition interne* sur un ensemble E, une application de E×E dans E. Exemples : l'addition, la multiplication sur l'ensemble des nombres réels ou encore, l'intersection et la réunion sur l'ensemble des parties d'un ensemble E. Ainsi définie, une loi de composition interne est une relation binaire. Mais, il n'est pas nécessaire de se limiter à ce cas, par exemple, l'application qui à un entier naturel n fait correspondre son successeur n+1 est une opération unaire définie sur l'ensemble des entiers naturels. Plus généralement, étant donné un ensemble E, les applications

$$E \to E \; ; \qquad E \times E \times E \to E \; ; \qquad E^n \to E$$

sont dites respectivement, opération unaire, ternaire et n-aire

On appelle *loi de composition externe* sur un ensemble E de domaine d'opérateurs un ensemble Ω, une application de Ω×E dans E. On dit que Ω opère sur l'ensemble E. Exemple : l'application de {2}×N dans N, qui à un couple (2 , *n*) fait correspondre l'entier naturel $n + 2$. On peut de même définir des lois de composition externe plus générales, applications de $\Omega \times E^n \to E$.

---

[32] Nous ne pensons pas qu'il en existe une qui soit satisfaisante, pas plus qu'existe une définition des mathématiques.

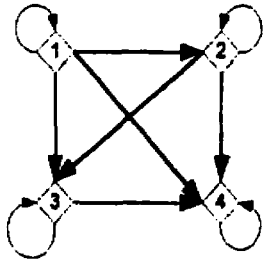
Par *opération* sur un ensemble E nous entendrons toute loi de composition interne ou externe sur E. Dans ce sens, une opération est un procédé qui permet de combiner des éléments d'un ensemble E, ou d'opérer sur eux à l'aide d'éléments d'un ensemble Ω, et d'obtenir d'autres éléments de E. Faisons remarquer toutefois que la plupart des opérations que l'on utilise en algèbre sont binaires.

Le fait qu'une opération soit une application assure que les produits obtenus sont des éléments de l'ensemble E sur lequel elle est définie.

Une opération peut être représentée de plusieurs manières différentes : au moyen d'une règle énoncée oralement ou par écrit, d'un tableau ou d'un diagramme, comme l'illustre la figure 3.1 dans le cas de l'opération définie dans {1, 2, 3, 4}qui à un couple (x, y) fait correspondre $\max(x, y)$:

$$\begin{array}{l} \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} \\ (x,y) \mapsto \max(x,y) \end{array}$$

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4



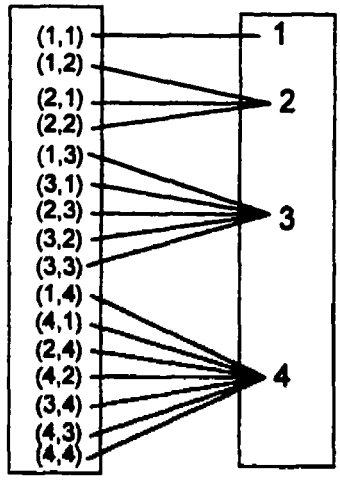


Figure 3.1 : Différentes façons de représenter une opération

Les trois dernières représentations ne sont pas possibles en pratique quand l'ensemble contient une infinité d'éléments, aussi peut-il s'avérer nécessaire de définir l'opération au moyen d'axiomes donnés ou de présenter la règle de l'opération[33].

---

[33] Comme par exemple l'opération : $\begin{array}{l} N \times N \to N \\ (x,y) \mapsto 2x \end{array}$

La notion d'opération occupe une place fondamentale en algèbre. Car selon notre vision, dans les activités mathématiques qu'on y exerce peuvent intervenir des opérations pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, translation, etc.), mais en restant dans le cadre de processus finis seulement. Dans ce sens, une grande partie de l'arithmétique est incluse dans l'algèbre[34]. Ainsi, l'établissement de l'égalité

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, (0 \leq x < 1 \text{ et } n \in \mathrm{N}),$$

de l'inégalité

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ , \ a \geq 0 \text{ et } b \geq 0$$

et de la proposition :

> si p, q et r désignent les symétries orthogonales par rapport aux hauteurs d'un triangle équilatérale et I la transformation identique,
>
> on a, par exemple : $p^2=q^2=r^2=I$ et $pq=qr$

font partie de l'algèbre, alors que celle de l'égalité

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}, \ (0 \leq x < 1)$$

ne relève pas de l'algèbre, mais plutôt du domaine de l'analyse mathématique, parce qu'elle fait intervenir une infinité de termes.

Cette vision de l'algèbre est large. *Elle inclut une grande part de l'arithmétique et intègre des éléments de l'analyse mathématique et de la géométrie.* Toutefois, elle est suffisante pour les besoins de notre travail. En effet, d'une part, bien qu'elle ne soit pas assez précise, elle nous sert pour donner assez tôt une signification au terme algèbre, dont nous

---

[34] Définir les nombres entiers naturels et l'opération d'addition, par exemple, n'est pas du domaine de l'algèbre. Pour faire de l'algèbre, il faut déjà que soient définis des objets et des opérations.

identifierons plus tard de façon plus précise les aspects importants. D'autre part, comme notre but est de définir un curriculum d'algèbre dans l'éducation de base, le fait que cette signification de l'algèbre inclut une grande part de l'arithmétique et intègre des éléments de l'analyse et de la géométrie est un atout, dans le sens qu'elle permet d'entrevoir des connections entre l'algèbre et ces disciplines favorisant l'élaboration d'un curriculum d'algèbre qui s'intègre à celui des mathématiques à l'école.

Pour sa part, van Reeuwijk (1998) adopte un point de vue proche du nôtre :

> From a mathematical point of view, algebra deals with systems in which operations play a role: addition (of numbers or other "thing"), multiplication (numbers, other "thing"), and the relations with the inverses. In others words, algebra deals with structure. Algebra is the study of operation structures. Following this point of view, arithmetic is a subdomain of algebra.
> (...)
> Calculus deals with change of magnitude and continuous and discrete changes. Very large and very small are important in calculus; grasping the infinite small and infinite large is a way to draw conclusions about the finite space in between.
> (...)
> When talking about school algebra, I mean something other than mathematical algebra. Algebra in the context of school algebra is a coherent integration of elements from the three domains: arithmetic, algebra, and calculus. (pp. 83-84)

Finalement, on appelle *système algébrique* un ensemble dans lequel une ou plusieurs opérations sont définies satisfaisant des axiomes donnés. Les systèmes de nombres en sont des exemples. Dans un système algébrique, il peut exister un autre type de relations, par exemple la relation d'ordre ou de divisibilité dans le système des entiers naturels.

3.3.1.2 Les notions d'espace de calcul algébrique et d'équations algébriques

Soit E un système algébrique dans lequel sont définies une ou plusieurs opérations. L'existence d'opérations dans l'ensemble E donne la possibilité de combiner des éléments de E, de combiner les produits obtenus et ainsi de suite. Il peut arriver que deux combinaisons différentes produisent le même élément de E. Effectuer et

comparer de telles opérations sont des tâches qui peuvent s'avérer fastidieuses à réaliser mentalement. Il est nécessaire de les rendre «observables». Pour cela, nous allons définir un *espace de calcul algébrique* associé au système algébrique E nous permettant 1) de désigner par des signes les éléments de E, les opérations et les relations définies sur E ainsi que la forme des opérations que l'on peut effectuer sur ces signes, 2) d'opérer sur ces signes à l'aide des opérations et des relations définies sur E, et 3) de déterminer des relations (spécialement les relations d'équivalences) entre ces signes suivant les règles des opérations et des relations définies sur E[35]. Il n'est pas absolument nécessaire que les signes utilisés soient des caractères alphanumériques; ils peuvent être des mots du langage naturel, des diagrammes, des tableaux, des graphes ou n'importe quelle représentation verbale ou iconique.

Expliquons de manière plus détaillée ce qu'est un espace de calcul algébrique. Pour cela, donnons-nous un système algébrique familier tel l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté Z, dans lequel nous ne considérons pour l'instant que les opérations usuelles d'addition et de multiplication. L'espace de calcul algébrique qui lui est associé, que nous notons Z', contiendra, en vertu de la condition 1) les signes pour représenter les nombres entiers relatifs, par exemple l'écriture décimale des nombres à l'aide des chiffres arabes, les symboles + et × pour désigner les opérations d'addition et de multiplication, respectivement. Également, Z' contiendra toutes les combinaisons permises de signes représentant les nombres et des opérations ainsi que leurs produits, comme $2 + 3$; $2\times(3 + 4)$; $2\times3 + 3\times4$, 4^3-3^4; nous considérons celles-ci comme des expressions algébriques de domaine Z. Une *expression algébrique* désigne ainsi la représentation d'une opération ou d'une chaîne finie d'opérations que l'on peut effectuer sur des éléments de Z, c'est-à-dire de représentations d'opérations ou de chaînes d'opérations effectuées sur des éléments de Z à l'aide de l'addition et de la multiplication. Par exemple, l'expression algébrique $2\times(3 + 4)$ peut être interprétée comme l'application de la chaîne d'opérations : *multiplier un premier nombre par la valeur de*

[35] Dans cette caractérisation, nous nous sommes inspiré de la définition que donne Kaput (1992) à la notion de *système de représentation*.

la somme d'un deuxième et d'un troisième, aux nombres 2, 3 et 4 pris dans cet ordre[36]. Pour représenter la forme de cette chaîne d'opérations, nous devons utiliser des variables de domaine Z, c'est-à-dire les signes désignant les éléments de Z, que nous appellerons des constantes, ainsi que d'autres signes qui n'ont aucune signification en eux-mêmes, par exemple des lettres, qu'on utilise en mathématiques pour construire des formules ou énoncer des théorèmes. Nous obtenons dans notre exemple, la forme a × (b + c), où a, b et c sont des variables de domaine Z; c'est-à-dire que si nous remplaçons ces lettres par des constantes dénotant des éléments définis de Z, nous obtiendrons la description d'un certain nombre de Z. Nous appellerons a × (b + c) aussi une expression algébrique de domaine Z et nous élargissons cette définition aux variables x de domaine Z.

En résumé, une expression algébrique ayant comme domaine un système algébrique E est une représentation, utilisant un nombre fini de signes, d'opérations ou de chaînes d'opérations effectuées sur des variables de domaine de E à l'aide de(s) opération(s) définie(s) sur E. Par exemple, dans l'ensemble des nombres réels muni des opérations d'addition et de multiplication :

$\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}+3\right)^2$, $\frac{2+5}{4-2}$, e^2, $\frac{1}{1-x}$, $\sqrt{x}$, $1+x+x^2+\ldots+x^n$, $(x+y)(x-y)$, $\frac{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}{5x-1}$ sont des expressions algébriques, tandis que 0,3333333.... ; 1,414213562373095...., $2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots.$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, e^x, $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ n'en sont pas.

Les expressions algébriques de domaine le système des nombres réels sont donc les expressions polynomiales à plusieurs variables et à coefficients dans R, ainsi que toutes

---

[36] Dit autrement, c'est une application de $N^3 \to N$, $(a,b,c) \mapsto a(b+c)$. La forme de l'opération est la règle de cette application.

les expressions ayant un nombre fini de termes que l'on peut obtenir en utilisant la division polynomiale et l'extraction des racines nièmes de polynômes. En supposant définies les expressions algébriques polynomiales, nous pouvons préciser de manière formelle ce qu'est, dans le cas général, une expression algébrique de domaine le système des nombres réels. Pour cela, rappelons la notion de fonction algébrique [37]:

> Une fonction numérique f à variable réelle est algébrique s'il existe un polynôme $P \in R[X, Y]$[38] tel que $P(x, f(x)) = 0$ pour tout réel x appartenant au domaine de définition de f.

En généralisant cette définition au cas des fonctions à plusieurs variables réelles, nous dirons qu'une fonction numérique f à n variables réelles est algébrique s'il existe un polynôme $P \in R[X_1, X_2, ..., X_n, Y]$[39] tel que $P(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0$ pour tout réel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ appartenant au domaine de définition de f. Nous dirons alors qu'une expression $e(x_1, x_2, ..., x_n)$ est algébrique si la fonction

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto e(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ pour } (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$

est algébrique.

Par exemple, l'expression $\sqrt{x}$, est algébrique puisque pour tout $x \geq 0$ on a $P(x, \sqrt{x}) = 0$, avec $P(X, Y) = X - Y^2$. De même l'expression $\frac{x}{y}$ est algébrique car pour tout x réel et tout y réel non nul, on a $Q(x, y, \frac{x}{y}) = 0$ avec $Q(X, Y, Z) = YZ - X$. En revanche, les expressions $sin(x)$ et $exp(x)$, par exemple, ne sont pas algébriques de domaine le système des nombres réels.

Faisons remarquer que le caractère algébrique d'une expression est toujours relatif à un système algébrique et donc à la nature des éléments, des opérations et relations qui y sont définies. Dire que l'expression $exp(x)$ n'est pas algébrique relativement au système

---

[37] Bouvier, A. et George, M. 1974. *Dictionnaire des mathématiques.* Paris : Presses Universitaires de France.

[38] $R[X, Y]$ désigne l'ensemble des polynômes en X et Y à coefficients dans R.

[39] $R[X_1, X_2, ..., X_n, Y]$ désigne l'ensemble des polynômes à n+1 indéterminées et à coefficients dans R.

des nombres réels signifie que cette expression ne peut pas être obtenue en utilisant un nombre fini de fois des variables de domaine R et les opérations d'addition, de multiplication, ainsi que leurs inverses, et l'extraction des racines nièmes. Par contre, si dans le système des nombres réels on considère l'opération unaire $x \mapsto exp(x)$, l'expression $exp(x)$ est algébrique sur ce nouveau système algébrique et une égalité du type $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ n'est pas du domaine de l'algèbre car le second membre de l'égalité n'est pas une expression algébrique.

Ajoutons finalement qu'une expression algébrique peut être décrite de manière verbale[40] ou en utilisant d'autres symboles que les caractères alphanumériques[41].

Pour satisfaire la deuxième condition, notre espace de calcul algébrique Z' doit nous permettre d'opérer un nombre fini de fois sur des expressions algébriques à l'aide des opérations définies sur Z obtenant ainsi d'autres expressions algébriques. Par exemple, à partir des expressions $x + 2$ et $2x + 1$, on peut former des expressions algébriques comme $(x+2)^3$, $(x+2)(2x+1)$, $(x+2)^2-(2x+1)^3$, etc.

Jusqu'à présent, dans l'espace de calcul algébrique Z', nous pouvons décrire et former au moyen des expressions algébriques des représentations d'opérations que l'on peut effectuer sur les éléments de Z au moyen des opérations d'addition et de multiplication. La troisième condition que doit vérifier un système de représentation (déterminer des relations, spécialement celles d'équivalences, entre les signes suivant les règles des opérations et des relations définies sur E) est tout à fait essentielle car il nous faut pouvoir comparer des expressions algébriques, par exemple savoir quand deux d'entre elles, bien que de formes différentes, désignent les mêmes éléments de Z quand on remplace les variables par des constantes.

---

[40] Voir figure 2.3
[41] *ibid.*

Étant donné un système algébrique E, nous entendons par *équation algébrique de domaine E* toute forme propositionnelle constituée par deux expressions algébriques de domaine E reliées par le symbole «=». Une équation peut alors avoir quatre significations différentes : 1) exprimer que deux expressions algébriques désignent le même élément de E, comme $2 + 3 = 5$, ou $\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; 2) désigner une identité formelle comme $2x + 1 = 2x + 1$, ou une proposition universelle[42] comme $(x+1)^2=x^2+2x+1$ justifiée par une propriété de l'opération; 3) désigner une égalité conditionnelle où intervient une inconnue que l'on doit rendre connue, comme $2x + 1 = 3$, ou finalement 4) désigner une égalité conditionnelle faisant intervenir des variables de domaine E, comme $y = 2x + 1$.

Les règles des opérations, les propriétés de la relation = ainsi que les règles d'inférence logique nous permettent de transformer des équations en d'autres et d'identifier les relations entre elles. Par exemple, les deux équations $(x - 1)(x + 1) - 3 = 0$ et $x^2 - 4 = 0$ sont équivalentes car en vertu des propriétés de l'addition et de la multiplication dans Z, on a $(x - 1)(x + 1) - 3 = x^2 - 4$. Cette dernière équation est équivalente à $(x - 1)(x + 1) - 3 = (x - 2)(x + 2)$, puisque $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ et que la relation = est transitive.

Par ailleurs, dans le système algébrique Z, on peut considérer d'autres types de relations comme par exemple la relation d'ordre $\leq$ et la relation de divisibilité $|$. Avec ces relations, il est possible de former *d'autres formes propositionnelles algébriques* différentes des équations, comme $2ab \leq a^2 + b^2$ ou $ab \mid (a + b)^2 - (a - b)^2$, a et b étant des variables de domaine Z. Dans ce cas aussi, les règles des opérations d'addition et de multiplication et des relations $\leq$ et $|$ ainsi que les règles d'inférence logique permettent de transformer des formes propositionnelles algébriques en d'autres et d'identifier les relations entre

[42] Dans le sens où si l'on remplace les variables par des constantes, on trouve toujours une proposition vraie.

elles. Par exemple, $2ab \leq a^2 + b^2$ est équivalente à $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, ou encore $(x|a \text{ et } x|b)$ implique $x|(pa + qb)$.

Finalement, dans Z', on peut *calculer algébriquement*, c'est-à-dire transformer des expressions algébriques, des équations ou des formes propositionnelles algébriques en d'autres en utilisant les propriétés des opérations et des relations définies sur E ainsi que les règles de la relation d'égalité et d'inférence logique. Calculer algébriquement revient à établir des liens logiques (d'équivalence, de nécessité ou de causalité) entre deux expressions algébriques ou équations ou formes propositionnelles algébriques.

En résumé, étant donné un système algébrique E muni d'opérations et de relations données, un espace de calcul algébrique E' associé à E est un système de représentation de E contenant les expressions algébriques, les équations et les formes propositionnelles algébriques de domaine E, la relation d'égalité et les règles d'inférence logique. Dans E', on peut calculer algébriquement dans le sens défini plus haut. Les règles des opérations et des relations définies dans E existent dans E' sous forme de propositions; par exemple, dans Z, la propriété de la commutativité de l'addition est représentée dans Z' sous forme de l'identité universelle : $a + b = b + a$, pour tout a et b dans Z. Réciproquement, toute nouvelle identité universelle établie dans Z' est une propriété des opérations et/ou des relations dans le système algébrique E.

Par ailleurs, dans toute activité algébrique, il est indispensable de se placer dans un espace de calcul algébrique. Considérons pour cela les quatre problèmes suivants :

> (S1) : Jean et Fred jouent aux billes, chacun possède un lot initial de billes. Si Jean gagne une bille à Fred, il aura le double du nombre de billes de Fred. Si par contre c'est Fred qui gagne une bille à Jean, ils auront le même nombre de billes. Combien Jean et Fred ont-ils de billes au départ ?
> (S2) [43]: Considérons une pendule ayant perdu sa petite aiguille, et ne nous intéresserons qu'aux multiples de 5 minutes, durée que nous prendrons comme unité (indivisible) de temps. Commençons une certaine expérience lorsque la grande aiguille est devant le 3. Supposons qu'à la fin

[43] Ce problème est emprunté à : Warusfel, A. (1969) *Les mathématiques modernes*. Paris : Édition du Seuil

de l'expérience elle se trouve devant le 7. Combien l'expérience a-t-elle duré?
(S3) : Quels sont les entiers naturels dont le nombre de diviseurs est impair ?
(S4) : Factoriser dans R(X) l'expression polynomiale : $2X^3 + X^2 - 5X + 2$

Dans la situation (S1), les variables sont les nombres de billes; les opérations en jeu sont l'addition et la multiplication. Le domaine des variables est l'ensemble des entiers naturels muni des opérations d'addition et de multiplication, soit le système algébrique usuel des nombres entiers naturels. Dans la résolution algébrique de ce problème, le calcul est conduit dans l'espace de calcul algébrique associé au système des nombres entiers naturels. Pour (S2), le système algébrique correspondant (domaine des variables muni des opérations et relations pertinentes) est Z_{12} , l'ensemble des nombres entiers naturels modulo 12 (ou bien Z muni des opérations classiques et de la relation de congruence modulo 12). Pour (S3), le système algébrique correspondant est l'ensemble des nombres entiers naturels muni des opérations classiques ainsi que de la relation de divisibilité. Pour (S4), le système algébrique correspondant est l'ensemble des polynômes à coefficients réels muni des opérations classiques. Dans chacun de ces exemples, le calcul algébrique est conduit dans l'espace de calcul algébrique associé au système algébrique.

La disponibilité de tels espaces de calcul algébrique rend l'activité algébrique possible et permet l'application de l'algèbre à des situations différentes. Les espaces de calcul algébriques les plus utilisés en algèbre élémentaire sont les différents systèmes de nombres munis des opérations usuelles. L'étude de tels espaces de calcul algébrique est donc importante en algèbre.

3.3.1.3 Les notions de structure algébrique et de structure de situation

Dans notre travail, nous parlerons de structure dans deux sens principaux. Le premier est celui de *structure algébrique,* c'est-à-dire comme classe de systèmes algébriques dont les opérations, et relations, satisfont à un même ensemble de propriétés qui seront

considérées comme des axiomes. Dans ce sens, une structure algébrique est une abstraction de systèmes algébriques. Par abus de langage nous diront qu'un système algébrique possède une structure algébrique dans le sens où il appartient à la classe de systèmes algébrique qui définit cette structure algébrique. Également, nous dirons qu'un espace de calcul algébrique E' possède la structure algébrique du système algébrique E qu'il représente. Les axiomes de la structure algébrique ainsi que les propriétés qui en découlent fournissent les justifications des règles du calcul algébrique de E'.

Finalement, nous ferons dans notre travail la distinction suivante. Si un système algébrique E est muni seulement d'opérations, nous parlerons alors de structure algébrique pure (comme le groupe, l'anneau, le corps ou encore l'espace vectoriel). Si, en revanche, dans E se trouve aussi défini un autre type de relation (relation d'ordre, par exemple) nous parlerons alors de structure algébrique mixte (comme le système des entiers relatifs où l'on considère la relation de divisibilité).

Le deuxième sens dans lequel nous emploierons souvent le mot structure est celui de *structure d'un système de relations entre variables d'une situation réelle ou mathématique*; parfois sous forme abrégée, nous parlerons de la *structure de la situation*. À ce propos, examinons la situation suivante :

> Dans une ferme, il y a des poules et des chèvres. En tout, on a compté 25 animaux totalisant 70 pattes. Combien y-a-t-il de chèvres et de poules ?

Dans cette situation, nous pouvons distinguer un ensemble de données et d'inconnues(R), comme la classe des poules et celles des chèvres, le nombre de chèvres dans la ferme, le nombre de poules dans la ferme, le nombres de pattes des chèvres, le nombre de pattes des poules ; ainsi qu'un ensemble de relations entre ces données : le nombre de chèvres plus le nombre de poules vaut 25, le nombre de pattes des chèvres plus le nombre de pattes des poules vaut 70, le nombre de pattes de chèvres vaut quatre fois le nombre de chèvres, le nombre de pattes de poules vaut deux fois le nombre de poules. Nous avons ainsi mis en évidence un système de relations entre un certain

nombre de variables et dans ces relations figurent des opérations (ici l'addition et la multiplication). La structure de ce système est définie par la manière dont ces variables sont reliées entre elles. Désignant par x le nombre de poules et par y le nombre de chèvres, le système d'équations : $\begin{cases} x+y=25 \\ 2x+4y=70 \end{cases}$ offre une représentation algébrique de cette structure, laquelle peut être aussi décrite différemment, en mots ou en images par exemple.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter en détail les trois principales caractéristiques de l'algèbre que nous avons déjà annoncée à la fin de la section 3.3.

3.3.2. Construction et interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques

Historiquement, l'algèbre s'est présentée d'abord comme un moyen — plus puissant que l'arithmétique — de résolution de problèmes concrets. Par problème concret nous entendons un problème issu d'une situation du monde matériel. Rappelons que dans *Le livre concis d'al-jabr et d'al-muqàbala*, premier traité d'algèbre dans l'histoire, Al-Khawarizmi déclare vouloir fournir aux gens un manuel concis dont ils puissent se servir pour leurs problèmes de calcul, pour leurs échanges commerciaux, pour leurs successions et pour l'arpentage de leurs terres. Depuis Diophante jusqu'à Viète au moins, les algébristes se sont occupés principalement à développer des méthodes générales pour résoudre des classes de problèmes, méthodes essentiellement de nature analytique.

La généralité de la méthode algébrique réside tout particulièrement dans le fait que dans un problème de n'importe quel contexte, le calcul de la grandeur inconnue dépend uniquement de la forme du système de relations entre cette grandeur et les grandeurs connues, soit en langage moderne, de l'équation mathématisant le problème. Dans ce sens, décrivant la méthode algébrique pour le calcul de la valeur de la grandeur

inconnue, al-Karaji souligne l'importance de trois choses. Premièrement, et c'est là la plus difficile, dit-il, la *formulation* du problème à l'aide d'un traitement l'amenant au stade de l'équation, deuxièmement, *les conditions du problème* et troisièmement, *les opérations de l'algèbre*, à savoir l'augmentation, la diminution, la multiplication, la division, l'addition, la soustraction, la proportion, la restauration et la réduction[44] (al-jabr wa'l-muqàbala), enfin la détermination de l'inconnue. Pour sa part Viète explique la méthode algébrique comme un processus comportant trois étapes successives. La première est l'analyse *zététique* qui, comme nous l'avons présentée en 2.2.5, consiste à adopter un symbolisme permettant de noter tant les grandeurs inconnues que les grandeurs connues, à exprimer les liens qui les unissent et à dégager l'équation qui, sous forme abstraite, résume le problème posé. La seconde est l'*analyse poristique* qui étudie, transforme, discute cette équation. Enfin la troisième, l'*exégétique*, ou *analyse rhétique*, résout l'équation, soit par des constructions s'il s'agit de géométrie, ou par des calculs s'il s'agit d'arithmétique (Itard, 1976). Nous reconnaissons dans l'explication d'al-Karaji et de manière beaucoup plus explicite, dans les trois types d'analyse de Viète, le processus de modélisation mathématique.

Rappelons que ce processus comporte trois grands moments, comme l'explique élégamment John Synge, l'un des spécialistes des mathématiques appliquées :

> L'application des mathématiques à un problème concret comporte trois étapes : a) plonger du réel dans le monde des mathématiques; b) nager dans le monde des mathématiques; c) émerger du monde des mathématiques pour revenir dans le réel en étant porteur d'une prévision. (Lu dans Bell, 1979, p. 331).

La modélisation est un aspect majeur de l'activité mathématique. Derrière l'œuvre d'al-Khawarizmi se situe un travail de modélisation important : il part d'un problème pratique à résoudre et formule une équation qui le mathématise; cette dernière est

---

[44] Ces termes ne sont pas définis dans les documents que nous avons consultés. On peut comprendre qu'ils désignent des opérations classiques d'addition et de multiplication ainsi que les différentes transformations que l'on peut appliquer à une équation polynomiale pour la rendre sous une forme canonique.

transformée pour arriver à l'une des six équations canoniques d'al-Khawarizmi, à laquelle il applique alors l'algorithme correspondant.

Voici comment Henri Pollak décrit en détail les phases successives du processus de modélisation :

(1) The process begins with something outside of mathematics which you would like to know or to do or to understand.

• The result is a question in the real world, well-defined enough that you have made progress on it.

(2) You next select some important objects in this situation outside of mathematics, and relationships among them.

• The result is the identification of some key concepts in the situations you want to study.

(3) You decide what to keep and what to ignore in your knowledge of the objects and their interrelationships.

• The result is an idealized version of the question

(4) You translate the idealized version of the question into mathematical terms.

• The result is a mathematical version of the idealized question.

(5) You identify the field of mathematics you think you're in.

• You bring into the forefront of your consciousness your instincts and knowledge about this field.

(6) You do mathematics.

• The result is solutions, theorems, special cases, algorithms, estimates, open problems.

(7) You now translate back into the setting of the original problem.

• You now have a theory of the idealized version of the question which you find in (3) above.

(8) You confront reality in the form of the original situation as represented by (1). Do you believe what is being said in (7)? In other words, do your results, when translated back to the original situation, fit the real world?

• If yes, you have succeeded. You tell your friends, write it up, publish some papers, get a raise, get promoted, or whatever.

• If no, go back to the beginning. Did you pick the right objects and relationships among them? Do your choices of what to keep and what to ignore need to be revisited? The way in which your theory of the idealized problem fails to satisfy you should provide some hints of where there are difficulties. (Pollak 1997, pp. 99-100)

Cette description montre les trois moments du travail de modélisation mathématique décrits par Synge. Le premier est couvert par les phases (1), (2), (3) et (4) au terme desquels on arrive à une situation mathématique obtenue à partir de la traduction en termes mathématiques de la situation idéalisée. Les étapes (5) et (6) constituent le deuxième moment où le travail est purement mathématique. Le résultat de ce travail

est investi dans la construction de nouvelles connaissances de la situation idéalisée (étape 7) et, par la suite, de la situation du monde réel initiale (étape 8). Ces deux dernières étapes forment le troisième moment du processus de la modélisation.

La figure (3.2) illustre, de manière simplifiée, le processus de modélisation mathématique

Lorsque le modèle mathématique M est un élément d'un espace de calcul algébrique E' associé à un certain système algébrique E, nous dirons que M est un *modèle algébrique*[45]. M peut ainsi être une expression algébrique de domaine E, par exemple une équation ou un système d'équations ou une forme propositionnelle ou un système de formes propositionnelles. En outre, nous parlerons de *modélisation algébrique* quand le modèle mathématique est un modèle algébrique.

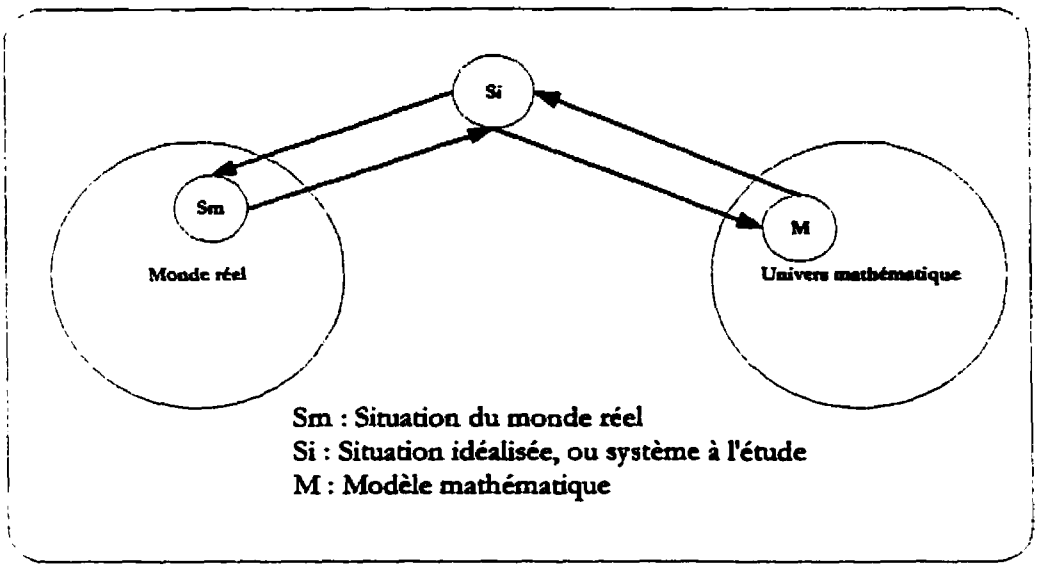


Figure 3.2 : Modélisation mathématique

À l'aide de ce schéma général, expliquons les grandes lignes de la modélisation algébrique. Notons d'abord que la construction du modèle algébrique, à partir de la

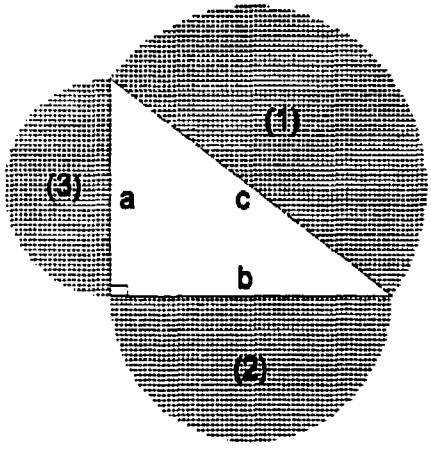
[45] Nous ne considérons pas le cas où le modèle M est lui-même un système algébrique.

situation idéalisée, nécessite la mise en évidence d'opérations (au moins une), de relations, des variables pertinentes ainsi que de relations existant entre elles. C'est la manière dont les variables pertinentes sont reliées entre elles, soit la structure de la situation idéalisée, qui constitue l'objet de l'étude. En choisissant les variables et les opérations pertinentes, et peut-être des relations, on est amené implicitement à choisir un système algébrique E qui est le domaine des variables et qui est muni de ces opérations et relations. Ainsi, on dispose d'un espace de calcul algébrique associé à E, dans lequel le modèle algébrique de la situation idéalisée est exprimé, et le travail algébrique de transformation de la forme du modèle est conduit, jusqu'à arriver à une forme à partir de laquelle on peut tirer les connaissances espérées de la situation idéalisée et par la suite, de la situation initiale du monde réel. Notons que le premier et le second moment du processus de modélisation mathématique nécessitent des connaissances propres au système étudié.

Prenons comme exemple le cas d'une situation en sciences physiques, comme le mouvement rectiligne uniforme d'un mobile. En se référant à la description du processus de modélisation de Pollak, le parcours des trois premières étapes nécessite des connaissances de la physique : suite à diverses observations d'un mobile en mouvement rectiligne uniforme, on arrive à se convaincre que si les frottements sont négligeables, les seules grandeurs caractéristiques de la situation sont la vitesse, le temps et la distance parcourue. Le domaine des variables doit pouvoir représenter des grandeurs continues sur lesquelles on puisse opérer à l'aide des opérations classiques d'addition et de multiplication. Dans un cas pareil, on opte généralement pour le système des nombres réels. Le modèle algébrique du système que l'on entend étudier appartient à l'espace de calcul algébrique associé au système des nombres réels. En se basant sur des expérimentations, on arrive à la conclusion que ces grandeurs caractéristiques sont liées par une relation linéaire de la forme : $x = v\,t$ où la variable v désigne la vitesse du mobile, x désigne la distance parcourue et t le temps écoulé. Cette équation est le modèle algébrique de la situation et elle se trouve construite dans la quatrième étape du processus de la modélisation. Il apparaît ici que dans la

construction du modèle, on a besoin de connaître la signification des variables, des opérations ainsi que des relations entre elles. Un travail algébrique simple montre que l'équation précédente est équivalente aux deux équations : $2x = 2v\ t$ et $x = 2v\ t/2$, lesquelles sont deux formes différentes du modèle. De la première, on peut interpréter par exemple, que pour que le mobile puisse parcourir le double de la distance durant une même période de temps il faut doubler la vitesse ; la seconde montre par exemple, qu'en doublant la vitesse on peut parcourir la même distance durant la moitié de la période de temps.

Le terme «modélisation mathématique» est habituellement réservé au cas où la situation à modéliser appartient à un univers non mathématique. Si, comme le fait Chevallard (1989b), on accepte que ce terme englobe aussi les cas où le système à modéliser est mathématique, les explications précédentes de ce processus restent encore valables. Chevallard (*ibid.*) désigne par *mathématisé* le registre du système à modéliser et par *mathématique* celui où est conduite la modélisation. Toutes les étapes décrites par Pollak peuvent être reformulées en conséquence. Considérons, par exemple, la résolution algébrique du problème suivant[46] :



Calculer l'aire du demi-cercle (1) en fonction des aires des demi-cercles (2) et (3).

Figure 3.3 : Résolution algébrique d'un problème géométrique

[46] Cet exemple est emprunté à Chevallard (1989b, p. 56)

Dans cette situation, le triangle fait partie de la classe des triangles rectangles connus par la théorie géométrique. Si on désigne par a et b les mesures des côtés et c la mesure de l'hypoténuse, le théorème de Pythagore nous permet de construire le modèle algébrique[47] : $c^2 = a^2 + b^2$. Dans un tel cas, le modèle se distingue bien du système modélisé. Un travail algébrique simple sur le modèle permet de répondre au problème. En effet, en multipliant l'égalité de Pythagore par $\frac{\pi}{8}$ on obtient : $\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$; dans le contexte du problème, cela peut s'interpréter : l'aire du demi-cercle (1) est la somme des aires des demi-cercles (2) et (3).

3.3.3 Manipulation d'expressions algébriques selon des règles prédéfinies

Nous avons vu dans le chapitre 2 que l'algèbre se présente dès son commencement, c'est-à-dire dans le traité d'al-Khawarizmi, comme un *calcul* caractérisé par les deux transformations (algébriques) *al-jabr* et *al-muqabala*, et dont l'objet est de déterminer la valeur de la grandeur inconnue en fonction des grandeurs connues d'un problème. L'algèbre était alors interprétée comme *une arithmétique de l'inconnue*. Pendant une longue période depuis al-Khawarizmi, les traités d'algèbre sont désignés comme des traités du *calcul d'al-jabr et d'al-muqabala*. Euler, quant à lui, a défini l'algèbre comme étant *la science du calcul avec des quantités de différents types*.

Dans le processus de modélisation algébrique, une bonne part du travail mathématique consiste à transformer le modèle algébrique dans un espace de calcul algébrique, ce qui revient à manipuler des expressions algébriques selon les règles de calcul de cet espace de calcul algébrique. Le modèle algébrique décrit comment des variables d'une situation sont reliées entre elles. En offrant une autre représentation du système de relations entre les variables, une nouvelle forme du modèle algébrique révèle alors des aspects différents de la situation. Dans ce sens, le calcul algébrique possède une

[47] Dans un espace de calcul associé au système des nombres réels.

puissance monstrative. Par exemple, dans le système des nombres entiers relatifs, les expressions algébriques $4n$ et $(n+1)^2-(n-1)^2$ sont équivalentes mais ne montrent pas la même chose : la première montre que l'entier désigné est un multiple de 4, la seconde montre qu'il est une différence de deux carrées. Pour sa part, Bell fait une observation qui va dans le même sens :

> Syntactic transformations of symbolic expressions can be made mechanically and used to expose genuine conceptual equivalence without the degree of mental effort required to establish those equivalence by working with the concepts themselves. (Bell, 1993)[48]

De ce fait, le calcul algébrique est un outil de la pensée, un moyen pour acquérir de nouvelles connaissances. On peut, en effet, transformer une expression algébrique selon des règles syntaxiques et aboutir à une nouvelle connaissance. Si, par exemple, on pose $a = \sqrt{2}$, on voit surgir une expression algébrique qui se prête à des transformations algébriques. On obtient, en effet : $a=\sqrt{2}$; $a^2=2$; $a^2-1=1$; $(a-1)(a+1)=1$ et alors $a=1+\frac{1}{1+a}$. Cette dernière expression de a permet de "produire" des connaissances à propos du nombre $\sqrt{2}$. En effet, en remarquant que $\sqrt{2}>1$, on déduit successivement que $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$; $\sqrt{2}>\frac{7}{5}$; $\sqrt{2}<\frac{17}{12}$ et ainsi de suite.

La manipulation des expressions algébriques se fait en suivant des règles bien définies, généralement inspirées de règles régissant les systèmes de nombres. En ce sens, un auteur du début du XIXième siècle expliquait ainsi ce qu'est l'algèbre :

> L'algèbre est l'art d'exécuter sur des quantités quelconques, au moyen des signes généraux, toutes les opérations de l'arithmétique, et de représenter, à l'aide des même signes, toutes les relations entre ces quantités. (Extrait d'un manuel publié à Paris en 1827, repris dans Chevallard, 1985, p. 57).

Cette conception de l'algèbre a conduit dans l'histoire à un problème épistémologique. En effet, dans une telle perceptive, l'algébriste prend la position que le calcul avec les lettres dérive du calcul avec les nombres. Aussi longtemps que le calcul avec les

---

[48] Le document original n'est pas paginé.

nombres dont le domaine n'avait pas été défini précisément, le calcul avec des symboles généraux, représentant des nombres, restait aussi non défini et inexpliqué. Wheeler (1989) rapporte que ce problème a été au cœur d'un débat sur la nature de l'algèbre entre les mathématiciens britanniques dans la première moitié du 19ième siècle. Pour les uns, l'algèbre est une "arithmétique généralisée" - i.e., elle traite des quantités et des opérations permises sur ces quantités, et ses règles sont dictées par les propriétés bien connues de l'arithmétique quantitative (Pycior, 1984). Pour les autres, l'algèbre est un système purement symbolique; il traite de symboles essentiellement arbitraires, régis par des règles essentiellement arbitraires. Et Wheeler de se demander : si les règles de l'algèbre ne dérivent pas nécessairement du comportement des nombres et des quantités, d'où dérivent-elles ?

Selon notre point de vue, les règles du calcul algébrique proviennent de ou sont générées par les propriétés des opérations et des relations définies dans le système algébrique en question, ainsi que des règles de la relation = et de l'inférence logique. Aussi, dans un espace de calcul algébrique, système de représentation d'un système algébrique, la syntaxe est-elle basée en fin de compte sur la sémantique de ce dernier.

Kaput fournit une explication comparable dans le cadre de systèmes algébriques particuliers, les systèmes de nombres :

> In the case of an algebraic system, as in the case of most practically used symbol system, the syntax is not arbitrary. It is very closely tied to the semantics of the number system that, if you didn't look at the number system, you might regard as the rules for combining numbers, as again a syntax. Then a syntax at one place is semantics at another and so on. This is not an easy subject, otherwise it would have been solved long ago. The syntax of the algebraic representational system is guided in a necessary contingent way on prior set of rules that evolved for numbers. (Kaput, 1987, p. 107)

Kaput ne semble pas faire une distinction claire entre système algébrique et ce qu'il appelle système de représentation algébrique. Pour sa part, Chevallard avance :

> L'élaboration d'un calcul algébrique suppose, à titre de motivation ou d'arrière-plan, un ou des **domaines de calcul**. On entendra par là un ensemble d'objets mathématiques sur lesquels **on puisse calculer**. Les

> nombres, les vecteurs, voire les points du plan (calcul barycentrique), fournissent des exemples élémentaires de tels domaines de calcul.
> Lorsque, en classe de sixième, l'enseignant passe de l'observation que 2 + 3 =5 et 3 + 2 =5 à l'écriture de la relation générale a + b = b + a, il passe alors du calcul **sur les nombres** (entiers naturels) à un calcul **algébrique** à coefficients entiers naturels. En d'autres termes, un calcul algébrique (...) rend manifeste une **syntaxe** à laquelle le domaine de calcul associé fournit une **sémantique**.
> À tout domaine de calcul correspondent ainsi des formes (ou structures) algébriques, qui offrent une image formelle du domaine de calcul considéré. Aux entiers naturels, on pourra faire correspondre la structure de demi-anneau (unitaire, commutatif, intègre); aux entiers relatifs la structure d'anneau (euclidien); aux rationnels, la structure de corps; etc. L'étude de calculs algébriques est l'un des objets de l'algèbre. (Chevallard, 1989b. pp. 49-50).

Les domaines de calcul dont parle Chevallard sont les systèmes algébriques et ce dernier ne précise pas dans quel domaine est conduit le calcul algébrique. Cependant, lui aussi soutient que le système algébrique fournit une sémantique à la syntaxe de l'espace de calcul algébrique correspondant.

Par ailleurs, la puissance du calcul algébrique est largement due aux systèmes de notation utilisés. Selon Dieudonné, en effet, «La tendance fondamentale de l'algèbre : noter de façon abrégée les opérations que l'on est amené à effectuer et leurs résultats, par une sorte de sténographie assez souple et assez perfectionnée pour rendre le maniement de ces opérations à la fois plus clair, plus rapide et plus facile.» (Dieudonné, 1955, p. 48). Ainsi, la notation matricielle permet de conceptualiser un système de n équations à n inconnues comme une équation à une inconnue de matrices et de fournir, grâce au déterminant, l'algorithme donnant les solutions de ce système.

En algèbre, on utilise de nombreux systèmes de notations et de manières de représenter les objets. Outre les symboles littéraux, on utilise des signes particuliers pour dénoter les objets et les opérations sur ces objets ou pour organiser les expressions algébriques pour en rendre la manipulation aisée et surtout pour pouvoir décrire syntaxiquement le mieux possible la structure de la situation. L'exemple le plus classique est celui de la

notation d'une équation polynomiale. Dans l'histoire, il a fallu une longue période pour qu'on arrive à écrire l'équation sous la forme :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

après qu'on se soit aperçu du rôle que joue le degré des coefficients, et qu'on ait réussi à trouver une notation satisfaisante pour les coefficients des équations. On sait qu'une notation pertinente facilite la conception de bonnes conjectures.

3.3.4 Élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.)

Cet aspect inclut l'algèbre dite abstraite ou moderne – marquant la dernière des huit grandes étapes du développement historique de l'algèbre que nous avons retenues et présentées au chapitre 2 – qui étudie les propriétés formelles (commutativité, associativité, etc.) des lois de composition[49] comme la théorie des groupes, ainsi que les associations des structures algébriques avec des structures non algébriques (d'ordre, combinatoires, topologiques) où l'algèbre domine fortement[50] comme la théorie des fonctions, les espaces vectoriels topologiques, la topologie algébrique, les algèbres topologiques, la théorie des schémas, etc. (Le Lionnais, 1979). Dans cette section, nous ne prétendons pas vouloir caractériser l'algèbre abstraite; nous allons nous contenter de présenter quelques aspects essentiels de l'étude des structures algébriques, tout en restant à un niveau élémentaire.

Cet aspect inclut également les activités visant à élaborer, à exprimer et à appliquer des structures de situations réelles ou mathématiques, comme des régularités numériques et des relations fonctionnelles.

---

[49] Soit les structures algébriques pures, selon notre terminologie.
[50] Soit les structures algébriques mixtes, selon notre terminologie.

L'étude de structures algébriques peut d'abord consister en la reconnaissance d'une structure algébrique à partir de la recherche des propriétés communes, moins évidentes et plus profondes entre différents cas de ses spécifications. Nous allons voir par la suite qu'une telle activité nécessite une habileté d'abstraction.

Étudier une structure algébrique peut signifier étudier les propriétés des opérations et des relations définies sur un système algébrique donné, par exemple un système de nombres. Ces propriétés permettent d'approfondir la compréhension du système algébrique, d'enrichir les règles du calcul algébrique dans l'espace de calcul algébrique et d'augmenter la puissance du calcul algébrique. Expliquant lui aussi cet aspect de l'algèbre, Kaput avance :

> These structures seem to have three purposes, (1) to enrich understanding of the systems that they are abstracted from, (2) to provide intrinsically useful structures for computations freed of the particulars that they once were tied to, and (3) to provide the base for yet higher levels of abstraction and formalization. (Kaput, 1995b, p. 77)

L'étude des structures algébriques peut consister aussi à étudier les morphismes entre les structures; étude qui permet de comparer les structures algébriques de systèmes algébriques, de dire par exemple si deux systèmes algébriques sont isomorphes (ont la même structure) et de voir comment les caractéristiques structurales sont transmises d'une structure à une autre via des applications (morphismes).

L'étude d'une structure algébrique permet de centrer l'attention sur des propriétés communes à plusieurs situations mathématiques qui en sont des concrétisations et de généraliser ces propriétés en les appliquant à de nouvelles situations. Par exemple, le fait que les nombres premiers engendrent multiplicativement les entiers peut être étendu aux polynômes (polynôme premier, décomposition d'un polynôme en un produit de polynômes premiers, etc.); si l'on fait abstraction de la nature des éléments, les entiers et les polynômes possèdent la même structure par rapport à la relation de divisibilité, d'où les résultats formellement similaires.

Pour sa part, Al-Cuocco explique d'autres aspects de l'étude d'une structure algébrique :

> Algebraists often devise decomposition theorems for classes of algebraic structures as well as for more atomic things (like integers). So, linear algebra is full of ways to decompose a vector space into useful subspaces, and a basic result in group theory shows how to decompose any finite commutative group into cyclic groups.
> Another decomposition technique in algebra is to break a structure up into classes with respect to some equivalence relation. In many cases, this is just an abstraction mechanism for expressing similarities among various elements of a structure. For example, when we were looking at how integers behave when they are exponents for a fifth root of 1, we saw that two integers behave the same if they differ by a multiple of 5. So, with respect to the situation at hand, the integers break up into 5 classes, each class containing all the integers that leave the same remainder when they are divided by 5. This has the effect of equating all multiples of 5 to 0, all numbers of the form 5k+1 to 1, and so on. (In many situations, algebraists use this mechanism to "get rid of" a troublesome element: If 7 is causing you trouble, work in the integers mod 7 instead of the ordinary integers.) (Al-Cuocco, 1996).

3.3.5 Conclusion

Rappelons que, de notre point de vue, le concept d'opération est l'ingrédient essentiel dans une activité algébrique : toute activité mathématique qui ne met pas en jeu une opération ne fait pas partie de l'algèbre.

L'algèbre apparaît comme ayant trois aspects essentiels complémentaires et indissociables compte tenu de ce qu'elle a été dans son histoire et de ce qu'elle est de nos jours. Ces trois aspects offrent une vue simplifiée mais non étriquée de l'algèbre. Ils sont en outre irréductibles. En effet, une part de toute activité algébrique consiste à manipuler des expressions algébriques; cet aspect est le plus connu, il reflète la nature dynamique de l'algèbre. L'aspect modélisation algébrique est aussi essentiel puisqu'il permet d'arrimer l'algèbre à la réalité et à l'étude d'autres domaines du savoir. Alors que l'aspect structure est indispensable pour établir des liens entre l'algèbre et des mathématiques supérieures. D'autre part, rappelons qu'une structure algébrique peut être considérée comme une abstraction d'une classe d'espaces de calcul algébrique et que ces derniers sont indispensables pour que le calcul algébrique puisse être déployé et

donc également pour l'étude algébrique de diverses situations mathématiques ou issues du monde réel.

3.4 PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE

Après avoir présenté les aspects essentiels de l'algèbre, nous allons maintenant présenter les principaux aspects de la pensée algébrique, soit les principales habiletés intellectuelles indispensables pour faire de l'algèbre. Ce sont de telles habiletés intellectuelles qu'on utilise en mathématiques pour produire des connaissances et que l'on vise à développer chez les élèves. À ce propos Al Cuocco et al. utilisent l'expression «habits of mind» :

> Much more important than specific mathematical results are the habits of mind used by people who create those results, and we envision a curriculum that elevates the methods by which mathematics is created, the techniques used by researchers, to a status equal to that enjoyed by the results of that research. (Al Cuocco et al., 1996).

Fait curieux, Gattegno utilise le mot «algèbre» dans le sens de «pensée algébrique», car pour lui l'importance en algèbre réside beaucoup plus dans les processus mentaux qui y sont utilisés que dans les connaissances :

> Algebra can be thought of as autonomous of the rest of mathematics, but it is also true (...) that all is algebra in mathematics, because to say algebra is to say the awareness of the mind at work on whatever content (this naturally is a mental shift) (...) algebra has no mental content and only describes the mental process (....) Algebra is always implicit in the treatment of mental questions, which, themselves, may have content. (Gattegno, 1965, p. 22)

Love conclut en ces termes:

> Algebra is now not merely 'giving meaning to the symbols', but another level beyond that: concerning itself with those modes of thought that are essentially algebraic — for example, handling the as-yet-unknown, inverting and reversing operations, seeing the general in the particular. Becoming aware of these thought processes and in control of them, is what it means to think algebraically. This shift is a move towards the Gattegno position, and even may be seen as an attempt to put some flesh on it. (Love, 1993)

À l'instar de Dienes (1966), nous croyons qu'il est insensé de tenter de séparer de quelque façon que ce soit les différentes branches des mathématiques, par exemple la géométrie et l'algèbre, puisqu'il y a tant de connexions entre elles qu'il est impossible de parler de l'une sans introduire quelque chose des autres. Cependant, nous n'allons pas adopter le point de vue extrême de Gattegno que «tout est algèbre en mathématiques». Parce que, d'une part, nous avons expliqué l'importance pour notre travail d'insister à la fois sur l'algèbre et sur la pensée algébrique, et, d'autre part, dans notre conceptualisation, un processus de pensée est une composante de la pensée algébrique uniquement quand il est essentiel dans l'activité algébrique. Dans une activité mathématique, nous parlons d'algèbre, rappelons-le, si une opération est en jeu et non à cause de la nature des processus qui y sont utilisés.

Analoguement au cas de l'algèbre nous avons tenté de caractériser succinctement la pensée algébrique à l'aide d'un petit nombre de composantes qui, une fois réunies, permettent de rendre compte des principaux processus de pensée utilisés en algèbre et qui s'articulent de façon harmonieuse avec les composantes identifiées précédemment pour l'algèbre. La tâche s'est avérée plus difficile dans le cas de la pensée algébrique que dans celui de l'algèbre. D'abord, parce que la plupart des écrits sur l'histoire de l'algèbre portent davantage sur le développement des connaissances algébriques construites par les mathématiciens que sur les processus de pensée que ces derniers utilisent en algèbre. Ensuite, parce que dans la communauté didactique, l'intérêt pour la pensée algébrique est relativement récent et les idées à ce sujet ne sont pas encore assez développées, nous semble-t-il.

Nous avons retenu les quatre aspects essentiels de la pensée algébrique suivants :

1) habileté à penser analytiquement; 2) habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques; 3) habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies et 4) habileté à généraliser et à

abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques.

Nous ne prétendons pas que cet ensemble de composantes de la pensée algébrique soit exhaustif; néanmoins, à notre sens, il exprime les composantes qui sont les plus essentielles à l'activité algébrique.

3.4.1 Précisions sur la terminologie utilisée

Notre revue du développement historique de l'algèbre laisse apparaître que penser analytiquement, abstraire et généraliser sont des processus de pensée qui y ont joué un rôle important. À cet effet, soulignons que bien que l'algèbre soit partie de considérations empiriques, son développement s'est accompagné de l'élaboration de concepts de plus en plus abstraits et généraux (par exemple de ceux de polynôme, notion générale d'opération, groupe, morphisme, catégorie) et de la tendance à élaborer des méthodes générales de résolution de problèmes.

Dans ce qui suit, nous présentons les processus d'abstraction et de généralisation. Il est à noter que ces deux termes sont utilisés pour désigner à la fois des processus et les produits de ces processus (Tall, 1991).

3.4.1.1 L'abstraction en mathématiques

Le processus d'abstraction joue un rôle important en mathématiques. Dieudonné va jusqu'à dire que l'essence des mathématiques réside dans le pouvoir d'abstraire et de raisonner sur des notions abstraites. Selon lui, les grands progrès en mathématiques, et en particulier en algèbre, ont été toujours liés à un progrès dans la capacité de se hisser un peu plus haut dans le domaine de l'abstraction (Dieudonné, 1955).

Les psychologues Piaget et Henriques distinguent deux formes principales d'abstraction :

> L'une dite «empirique», consiste à tirer son information des objets eux-mêmes en retenant certaines propriétés à l'exclusion des autres, et qui existaient en eux avant toute constatation de la part du sujet (par exemple la couleur ou le poids). L'autre, dite «réfléchissante», procède à partir, non pas des objets, mais de la coordination des actions que le sujet exerce sur eux, ce qui n'est nullement pareil, ou des opérations en général du sujet : elle consiste donc d'abord à réfléchir au sens d'un «réfléchissement» sur un plan supérieur ce qui est tiré de l'inférieur et, d'autre part, à réfléchir au sens d'une "réflexion" mentale dont le rôle complémentaire est de reconstruire sur le nouveau plan ce qui est abstrait du précédent, d'où une réorganisation qui exige une structuration nouvelle (Piaget et Henriques, 1978b, pp.5-6).

Suivant ces définitions, la plupart des objets mathématiques sont les produits d'abstractions empiriques ou réfléchissantes et, dans ce sens, ils sont des objets abstraits. Ainsi, les concepts de cercle, de triangle et le nombre 2, par exemple, sont des abstractions empiriques car chacun d'eux peut être perçu comme la propriété commune à un ensemble de divers objets (des objets «ronds» pour le cercle, des objets de forme «triangulaire» pour le triangle et des paires d'objets pour le nombre 2). Voyons un autre exemple. Selon Piaget, c'est par abstraction réfléchissante qu'un enfant arrive à découvrir que le nombre d'objets dans une collection est indépendant de l'ordre dans lequel ces objets sont placés. Pour cela, il doit compter des objets, les réorganiser, les compter à nouveau, les réorganiser, les compter, etc. Ces actions sont intériorisées et représentées mentalement de telle manière qu'elles soient objets de pensée et que l'enfant puisse les comparer et se rendre compte qu'elles aboutissent toutes au même résultat (Piaget, cité par Dubinsky, 1991).

Dienes (1961, p. 280) définit ainsi le processus d'abstraction en mathématiques: «The process of *abstraction* is defined as the process of drawing from a number of different situations something which is common to them all.» Il ajoute :

> Logically speaking it is an inductive process; it consists of search for an attribute which would describe certain elements felt somehow to belong together. A *class* is constructed out of some elements which will then be said to *belong* to the class. This fundamental relationship between classes and their elements, i.e., the relationship to "belonging" or "being an element of" is realised in the direction from elements to class. (Dienes, 1961, p. 282)

Dienes schématise le processus d'abstraction du nombre 2 comme suit :

Abstraction process :

Pairs of distinct objects (*elements*)	→	*Attribute "two"* (*class*)

Un ensemble de classes déjà formées peut conduire à une nouvelle abstraction (formation d'une nouvelle classe), cette dernière avec d'autres classes peut conduire à son tour à une nouvelle abstraction, et ainsi de suite. Dienes ajoute : «In the case of mathematical concepts, classes of classes of ... etc. of objects are heaped together in all sorts of relationships to each other.» (p. 286). Durant ce processus, l'utilisation d'un symbolisme est indispensable : «The mathematician's job is the making and sorting of such heaps. In order not to get lost in the maze of his own making, he uses symbolism which reminds him of the structure of the maze.» (*ibid.*)

Pour les besoins de notre travail, nous adopterons la définition de l'abstraction de Dienes.

3.4.1.2 La généralisation en mathématiques

La généralisation est, comme l'abstraction, un processus essentiel dans l'activité mathématique.

Comme pour l'abstraction, Piaget et Henriques distinguent deux formes de généralisation :

> Celle qui part des observables attachés aux objets, donc d'abstractions empiriques, et s'en tient à eux pour vérifier la validité des relations observées, pour établir leur degré de généralité et en tirer des prévisions ultérieures (mais sans encore chercher d'explication ou de "raisons" ce qui conduirait à dépasser les observables), est alors de nature essentiellement extensionnelle et consiste à procéder du «quelque» au «tous» ou du «jusqu'ici» au «toujours» : nous l'appellerons «généralisation inductive» (...). Par contre, lorsque la généralisation s'appuie ou porte sur les opérations du sujet ou leurs produits, elle est en ce cas de nature simultanément compréhensive et extensionnelle et aboutit donc à la production de nouvelles formes et parfois à de nouveaux contenus (...). Ces contenus sont alors engendrés par ces formes et non pas donnés dans

> des observables empiriques : nous parlerons à leur propos de «généralisations constructives»; (...). (Piaget et Henriques, 1978b. p. 6)

Dans cette thèse, nous allons plutôt adopter la définition que donne Dienes du processus de généralisation. Lui aussi distingue deux formes de généralisation :

> (1) *Primitive generalization* is the passing from one class to another where the other includes the former as a part.
> (2) *Mathematical generalization* is defined as follows : A class B is a mathematical generalization of the class A if B includes as a part an isomorphic image of A, in relation to all relevant properties. This means that the classes A and B could consist of quite different elements, as long as there was a part of B which was somehow an exact image of A, mirroring the properties of A in all relevant respects. (Dienes, 1961, p. 282)

Par exemple, un enfant peut noter que pour toutes les paires (a , b) de nombres entiers naturels qu'il a rencontrés, les sommes a + b et b + a sont égales. Une généralisation primitive consiste à supposer que ce fait doit être valable pour toutes les paires de nombres entiers naturels (*ibid.*). Le passage des entiers naturels aux nombres entiers positifs et négatifs est, en revanche, un exemple de généralisation mathématique : les nombres positifs ont exactement les mêmes propriétés que les entiers naturels (classe A), ils forment une sous-classe de la classe des nombres avec un signe (classe B) à laquelle les nombres entiers naturels n'appartiennent pas. L'image de la classe A dans la classe B est l'ensemble des nombres positifs. Ces deux exemples du processus de généralisation sont schématisés comme suit (*ibid.*):

Primitive generalization :

2+3=3+2, 4+1=1+4,... etc. *(including experience up to date)* *(restricted class)*	→	*a + b = b + a* *For all numbers a and b* *(generalized class)*
Mathematical generalization : *Natural numbers (1, 2 , 3, ...)* *(restricted class)*	→	*Positive and negative numbers* *(+1, +2, +3, ... -1, -2, -3, ...)* *(generalized class)*

3.4.2 Habileté à penser analytiquement

Rappelons que dans la section 2.5.1, nous avons défini l'habileté à penser analytiquement, dont nous avons souligné le rôle moteur joué dans le développement

historique de l'algèbre. Nous retiendrons cette habileté intellectuelle comme composante de la pensée algébrique dans le modèle que nous proposerons.

Lins (1992) aussi, qui à notre connaissance est le seul a avoir tenté de définir explicitement la pensée algébrique, a souligné l'importance de la pensée analytique en algèbre. Selon lui , «To think algebraically is, (i) to think ARITHMETICALLY, and (ii) to think INTERNALLY, and (iii) to think ANALYTICALLY.» (Lins, 1992, p. 56). Nous analyserons cette proposition plus loin.

3.4.3 Habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques

Cette composante de la pensée algébrique a trait à 1) l'habileté à construire des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques, à 2) l'habileté à interpréter des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques, et à 3) l'habileté à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques Nous allons présenter ces trois habiletés intellectuelles en nous référant à la description de Pollak du processus de modélisation et en les illustrant par la résolution du problème suivant : [51]

> Un congrès international de dermatologie réunit des médecins britanniques, allemands et français. Il y a deux fois plus de Français que d'Allemands, ces derniers étant eux-mêmes deux fois plus nombreux que les Britanniques. Deux techniques fort différentes y sont proposées pour soigner au mieux le pityriasis rosé de Gilbert, entre lesquelles chaque médecin présent est invité à choisir. La technique du professeur Smith remporte entre autres tous les suffrages britanniques. Et pour la technique du professeur Simon, il y a autant d'Allemands favorables que de Français hostiles.
> Quelle est alors celle des deux techniques qui remporte le plus de suffrages?

Dans le processus de modélisation, la construction du modèle algébrique est réalisée au terme des quatre premières phases de la description de Pollak que nous rappelons ici :

(1) The process begins with something outside of mathematics, which you would like to know or to do or to understand.

- The result is a question in the real world, well-defined enough that you have made progress

[51] Cet exemple est proposé dans Chevallard (1989, p. 14). Lui même l'a emprunté à Berrondo M. (1979). Les jeux mathématiques d'Eurêka. Paris : Dunod.

on it.

(2) You next select some important objects in this situation outside of mathematics, and relationships among them.

• The result is the identification of some key concepts in the situations you want to study.

(3) You decide what to keep and what to ignore in your knowledge of the objects and their interrelationships.

• The result is an idealized version of the question.

(4) You translate the idealized version of the question into mathematical terms.

• The result is a mathematical version of the idealized question.

Ces phases nécessitent selon nous quatre habiletés principales. La première est *l'habileté à bien sélectionner l'information requise*, par l'appréhension de la question, la sélection des objets importants ainsi que celles des relations entre eux. Pour la résolution de notre problème, il s'agit par exemple, compte tenu de la question, de noter que le nom de la maladie (pityriasis rosé de Gilbert) n'est pas une information importante, pas plus que le fait que les médecins soient des dermatologues et qu'ils soient réunis dans un congrès de dermatologie. Ce qui importe, c'est de saisir que l'ensemble des médecins (ceux qui sont présents au congrès) est réparti en trois classes disjointes : une classe des médecins français, une classe des médecins britanniques et une classe des médecins allemands et qu'il existe des relations entre les nombres cardinaux de ces classes. Également, il faut retenir que tous les médecins ont voté en faveur de l'une ou l'autre des deux techniques et tenir compte des différentes relations entre les différents suffrages. Le développement de cette habileté nécessite une longue pratique dans la modélisation de nombreuses situations de différents contextes.

La deuxième habileté nécessaire dans la construction de modèles algébriques est *l'habileté à choisir les variables et les relations pertinentes par rapport à l'objet de l'étude.* Si la situation comporte des données superflues par rapport à l'objet de l'étude, alors il faut les ignorer. Dans notre exemple, les variables pertinentes sont, le nombre de médecins français, le nombre de médecins britanniques, le nombre de médecins allemands ; le nombre de médecins français qui ont voté pour la technique du professeur Smith (et du professeur Simon, respectivement), le nombre de médecins britanniques qui ont voté pour la technique du professeur Smith (et du professeur Simon, respectivement), le

nombre de médecins allemands qui ont voté pour la technique du professeur Smith (et du professeur Simon, respectivement) ; le nombre total des médecins qui ont voté pour la technique du professeur Smith (et du professeur Simon, respectivement), ainsi que les relations «Il y a deux fois plus de Français que d'Allemands», «Il y a deux fois plus d'Allemands que de Britanniques», «tous les médecins britanniques ont voté pour la technique du professeur Smith», «pour la technique du professeur Simon, il y a autant d'Allemands favorables que de Français hostiles».

La troisième habileté nécessaire dans la construction de modèles algébriques est l'habileté à choisir, en vue de la traduire algébriquement, les variables ainsi que leur domaine, les relations, ainsi que le type de relation à retenir (équation, inéquation, système d'équations ou d'inéquations, tableau de valeur, etc.). Dans notre exemple, les variables appartiennent au domaine des nombres entiers naturels et les relations entre ces variables font intervenir les opérations d'addition et de multiplication ainsi que la relation d'ordre, puisqu'il s'agit de comparer des nombres (les deux suffrages qu'obtiennent les deux techniques). Cela signifie que, même si on n'en est pas conscient, on se place dans le système algébrique formé du système des nombres entiers naturels ou, comme on le fait par défaut, dans le système des nombres réels (pour autoriser le cas échéant, l'emploi des nombres réels négatifs, des fractions et de l'extraction de racines carrées). Également, se trouve fixé l'espace de calcul algébrique associé au système des nombres réels. C'est par rapport à cet espace de calcul algébrique que l'on représente les variables et les relations entre elles. Dans notre exemple, il s'agit de représenter, en fonction des paramètres du problème, les suffrages obtenus par les deux techniques et de les comparer. L'attention de l'algébriste sera centrée sur la manière de calculer ces deux suffrages. Les deux relations qu'il faut traduire algébriquement sont: 1) le nombre total de suffrages en faveur de la technique du professeur Smith est la somme des suffrages français, britanniques et allemands en faveur de cette technique, et 2) le nombre total de suffrages en faveur de la technique du professeur Simon est la somme des suffrages français, britanniques et allemands en faveur de cette technique.

La quatrième habileté nécessaire dans la construction de modèles algébriques est *l'habileté à représenter algébriquement les relations entre les variables pertinentes.* Pour ce faire, on peut procéder de deux façons au moins: 1) exprimer les relations pertinentes qui sont indépendantes en fonction d'un nombre minimum de variables, et 2) noter toutes les variables, décrire toutes les relations entre elles et ensuite réduire le nombre de variables et de relations. Dans notre exemple, si l'on procède selon la première possibilité, on commence par nommer les variables pertinentes en jeu dans la situation. On s'aperçoit que pour symboliser les effectifs des médecins français, allemands et britanniques, une seule variable suffit. Si b est le nombre des médecins britanniques, alors il y a $2b$ médecins allemands et $4b$ médecins français. De même, on se rend compte que pour exprimer en symboles le nombre des suffrages des médecins allemands, français ou britannique en faveur de la technique du professeur Simon ou de celle du professeur Smith, on n'a besoin que d'une seule variable. Soit x le nombre des médecins allemands en faveur de la technique du professeur Simon. On obtient alors :

Suffrages en faveur de la technique du professeur Smith	Suffrages en faveur de la technique du professeur Simon
$b + (2b - x) + x$	$x + (4b - x)$
$3b$	$4b$

Revenons à notre exemple, mais cette fois en procédant selon la deuxième possibilité. Désignons par a, b et f les effectifs des médecins Allemands, Britanniques et Français, respectivement. Désignons par a_1, b_1 et f_1 les suffrages allemands, britanniques et français respectivement, qui sont en faveur de la technique du professeur Smith ; et par a_2, b_2 et f_2 les suffrages allemands, britanniques et français respectivement, qui sont en faveur de la technique du professeur Simon. On obtient ici les relations :

$$a=a_1+a_2\,;\ b=b_1+b_2\,;\ f=f_1+f_2\,;\ f=2a\ ;\ a=2b\,;\ b_1=0\,;\ b_2=b\,;\ a_2=f-f_2=f_1$$

D'où l'on déduit :

Suffrages en faveur de la technique du professeur Smith	Suffrages en faveur de la technique du professeur Simon
$a_1+b_1+f_1$	$a_2+b_2+f_2$
$(a-a_2)+b+f_1$	$(f-f_2)+0+f_2$
$(a-f_1)+b+f_1$	f
$a+b$	$2a$
$3b$	$4b$

Dans la construction du modèle algébrique, la première méthode semble généralement nécessiter un effort cognitif plus important que la deuxième. En effet, elle oblige à réaliser mentalement des opérations et transformations algébriques qui sont faites syntaxiquement dans la deuxième méthode; elle présuppose d'appréhender la structure de la situation. En revanche, la seconde méthode sollicite plus que la première des habiletés dans la manipulation syntaxique des expressions algébriques.

Les habiletés intervenant dans les phases (5) et (6) suivantes du processus de modélisation seront présentées dans la section 3.4.3 où il sera question de l'habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies.

(5) You identify the field of mathematics you think you're in.

• You bring into the forefront of your consciousness your instincts and knowledge about this field.

(6) You do mathematics.

• The result is solutions, theorems, special cases, algorithms, estimates, open problems.

Présentons maintenant l'habileté à interpréter des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques qui réfère au deux dernières phases du processus de modélisation tel que décrit par Pollak :

(7) You now translate back into the setting of the original problem.

• You now have a theory of the idealized version of the question, which you find in (3) above.

(8) You confront reality in the form of the original situation as represented by (1). Do you believe what is being said in (7)? In other words, do your results, when translated back to the original situation, fit the real world?

• If yes, you have succeeded. You tell your friends, write it up, publish some papers, get a raise, get promoted, or whatever.

> • If no, go back to the beginning. Did you pick the right objects and relationships among them? Do your choices of what to keep and what to ignore need to be revisited? The way in which your theory of the idealized problem fails to satisfy you should provide some hints of where there are difficulties. (Pollak 1997, pp. 99-100)

Cette habileté consiste à interpréter dans la situation initiale des conséquences obtenues à partir du modèle algébrique. Dans notre exemple, le modèle (système d'équations) permet de conclure, après interprétation, que dans ce type de scrutin le nombre de voix obtenu par la technique du professeur Smith U = $3b$ et le nombre de voix obtenus par la technique du professeur Simon V = $4b$ ne dépendent que du paramètre b, qu'ils sont en outre des fonctions linéaires de b et que leur comparaison montre que U est à V ce que 3 est à 4.

Finalement, arrêtons-nous sur les habiletés principales faisant partie de l'habileté à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques. Nous considérons deux types de validation : une première qui peut intervenir n'importe quand durant le processus de modélisation et que nous appellerons validation locale ; une seconde qui intervient à la fin du processus de modélisation et que nous appellerons validation globale.

La première *habileté* est celle de *valider localement des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques*. Elle peut s'exercer à divers moments. Par exemple, lors de la construction du modèle, elle revient à s'assurer de la pertinence du choix des opérations, du domaine des variables et de la concordance des expressions algébriques avec les relations entre les variables de la situation qu'elles représentent et, le cas échéant, à recommencer l'analyse et la traduction algébrique des relations pertinentes. Durant le travail mathématique avec le modèle, cette habileté consiste à s'assurer de la validité des transformations que l'on effectue et des conséquences que l'on tire.

La seconde *habileté* consiste à *valider globalement des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques*. Comme l'explique Janvier (1996, p. 228): «It consists of testing the validity of the model by going back to the reality that it is supposed to represent». Elle

permet de voir si le modèle est raisonnable ou non, et si le problème a une solution ou non. Cette forme de validation nécessite des connaissances propres à l'univers de la situation modélisée. Par exemple, si l'on reprend la situation de la modélisation du mouvement rectiligne à vitesse constante, une validation du modèle algébrique $x = v\,t$, où la variable v désigne la vitesse du mobile, x désigne la distance parcourue et t le temps écoulé, consisterait, par exemple, à s'assurer expérimentalement de la validité de la formule $2x = 2v\,t$, en vérifiant que si on double la vitesse du mobile, celui-ci parcourra le double de la distance durant la même période de temps. Dans l'exemple des suffrages, cette habileté pousserait l'algébriste compétent à remarquer que dans ce scrutin, d'une part les nombres de voix ne dépendent que du paramètre b (effectif des médecins Britanniques), et que, d'autre part, quelle que soit la valeur du paramètre b, c'est la technique du professeur Simon qui l'emporte. Il sera porté alors à vérifier une telle observation en faisant varier la valeur du paramètre b.

3.4.3 Habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles syntaxiques prédéfinies

Nous avons expliqué, dans 3.3.3, que lorsqu'on fait de l'algèbre, on manipule souvent des expressions algébriques selon des règles syntaxiques prédéfinies. Pour que cette manipulation du calcul algébrique soit formellement valide et fonctionnellement pertinente – c'est-à-dire que, d'une part, ces transformations sont faites selon des règles syntaxiques prédéfinies et que d'autre part, la chaîne des transformations effectuées soit orientée pour atteindre le but recherché par l'activité – l'algébriste doit disposer et utiliser certains processus mentaux (ou certaines habiletés mentales) que nous désignons sous le titre «habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles syntaxiques prédéfinies».

Premièrement, en manipulant des expressions algébriques, l'algébriste se situe dans le registre de l'espace de calcul algébrique. Son attention est portée uniquement sur les règles du calcul algébrique qu'il peut appliquer, indépendamment de la signification des

variables et des opérations formant une expression algébrique. Kaput explique ceci de la manière suivante :

> When we deal with formalisms, whether traditional algebraic ones or those more exotic, our attention is on the symbols and syntactical rules for manipulating those formalisms rather than on what they might stand for, with much of their power arising from internally consistent, referent-free operations. The user suspends attention to what the symbols stand for and looks at the symbols themselves, thus frees to operate on relationships far more complex than could be managed if he or she needed at the same time to look through the symbols and transformations to what they stood for. (Kaput, 1999, p. 10))

Cette déviation de l'attention de la sémantique vers la syntaxe n'est pas facile à réaliser surtout lorsque l'expression algébrique que l'on manipule est un modèle d'une situation du monde réel ou que le système algébrique, pour lequel elle représente une chaîne d'opérations, est chargé sémantiquement. Rappelons la longue période de temps qu'il a fallu dans l'histoire de l'algèbre pour arriver à représenter les objets surs lesquels on opère algébriquement par des lettres qui n'ont aucune ontologie.

Une deuxième habileté importante chez l'algébriste compétent dans la manipulation des expressions algébriques se rapporte à *l'appréhension de la structure syntaxique d'une expression algébrique* (Kirshner, 1989). Par exemple, explique cet auteur, une simple factorisation comme $3x^2-6=3(x^2-2)$ requiert de reconnaître la soustraction comme l'opération dominante dans l'expression initiale, d'interpréter $3x^2$ comme $3[x^2]$ et non comme $[3x]^2$, et ainsi de suite. Il ajoute:

> Two separate subsystems of rules interact to yield the parse of an expression. In the first subsystem, explicit parsing symbols (parentheses, brackets, and braces) force a parse according to their location in an expression. Implicit parsing features such as grouping by rising to an exponent and vincular extension operate similarly. For example, x^{3y} is parsed differently form x^3y because of the physical grouping of 3 and y. We will call these explicit and implicit features *forcing markers*.
> [A] second subsystem (...) operates in the absence of such forcing markers. In this case, parsing defaults to the conventional hierarchy or operations. (Kirshner, 1989, pp. 275-276)

Ces règles syntaxiques font partie de l'espace de calcul algébrique et dépendent du système de notation utilisé.

Lorsqu'on manipule des expressions algébriques, on a tendance à transformer une expression, équation ou forme propositionnelle algébrique en une autre équivalente mais de structure syntaxique plus simple. Par exemple, la résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$$

est facilitée par la considération de la nouvelle variable u = x + y + z. Le système précédent est en effet équivalent à :

$$\begin{cases} 2x+2y+2z=6=2u \\ u-z=1 \\ u-x=2 \\ u-y=3 \end{cases}$$

lequel permet de trouver facilement les valeurs des inconnues : $z = 2$; $x = 1$ et $y = 0$.

La considération de la variable u est rendue possible grâce à l'appréhension de la *structure syntaxique* du système, c'est-à-dire de la façon dont les variables x, y et z sont mises en relation entre elles.

De la même façon, le système apparemment complexe suivant :

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^3=1 \\ y^3+\sqrt[3]{z}=2 \\ (x-1)^2+\sqrt[3]{z}=3 \end{cases}$$

possède la même structure syntaxique que le précédent. Les changements de variables: $X = (x-1)^2$; $Y = y^3$ et $Z = \sqrt[3]{z}$ permettent de conclure rapidement : $x = 0$ ou 2; $y = 0$ et $z = 8$.

Par ailleurs, lorsqu'on manipule des expressions algébriques, il va de soi que toutes les transformations que l'on utilise obéissent aux lois et propriétés du calcul dans l'espace de calcul algébrique. Cependant, cette manipulation doit être pertinente et doit nous conduire à résoudre la situation. Une autre habileté consiste alors à orienter la chaîne des transformations que l'on va effectuer dans le sens d'atteindre l'objectif de l'activité. S'il s'agit, par exemple, de la détermination de la valeur d'une inconnue, l'attention doit être portée à tenter d'exprimer cette inconnue en fonction des données connues du problème. Cela amène à opérer certaines manipulations algébriques. Ou, s'il s'agit de chercher à exprimer une régularité numérique, on doit chercher à décrire les relations entre les variables en jeu dans une telle situation par une expression algébrique dont la forme permet de saisir la régularité cherchée. Les transformations algébriques opérées sont alors destinées à cette fin. De sa part, Boero (1993) avance une idée analogue. Il affirme, en effet, que les transformations du code algébrique ont lieu à travers une relation dialectique entre les modèles de transformation standard et des anticipations, qui suggèrent une forme pertinente de la formule recherchée et la direction dans laquelle les transformations doivent être effectuées. Il note : «In general, standard patterns of transformation without anticipation offer blind perspectives – with the exception of some easy school exercises on "simplification" of algebraic expression, or standard resolutions of equations» (Boero, 1993). Certes il peut arriver que l'algébriste opère des transformations de manière syntaxique, mais cela ne constitue pas l'essentiel de son activité algébrique. Kaput apporte un témoignage dans ce sens, lorsqu'il avance: « Sometimes we use the symbols or representations as things-in-themselves, with their own formal rules and structures, and sometimes we see through them to other patterns in our experience» (Kaput, 1994).

Une autre habileté dans la manipulation des expressions algébriques consiste à *raisonner à partir de la structure syntaxique d'une expression algébrique, équation ou forme propositionnelle algébrique*, en utilisant des notations pertinentes en vue d'établir et de vérifier des conjectures et des généralités. Illustrons ceci par l'exemple suivant.

Donnons-nous comme objectif de découvrir quelques propriétés intéressantes de la somme $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$ en ayant en vue de généraliser les résultats trouvés. Dans ce sens, il est nécessaire d'exprimer autrement la somme $S(n)$. Il s'agit de trouver une expression de $S(n)$ qui permette, par exemple, de calculer aisément la valeur de $S(n)$, pour tout n donné. Ainsi, on peut montrer que $S(n) = n(n+1)/2$. À elle seule, cette expression résume un certain nombre de propriétés de $S(n)$. Par exemple, elle permet de voir pourquoi les nombres $S(n)$ sont dit triangulaires, puisque $n(n+1)/2$ peut être interprété comme la surface d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est une diagonale d'un rectangle de côtés n et $n+1$.

En outre, le procédé classique utilisé pour aboutir à l'expression $n(n+1)/2$ à partir de la définition de $S(n)$, peut être très instructif pour concevoir d'autres généralisations.

$$\begin{array}{ccccccccc}
S(n) & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n \\
S(n) & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 1 \\
\hline
2S(n) & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1)
\end{array}$$

d'où l'on tire : $2S(n) = n(n+1)$. On voit alors que le succès de la démarche dépend de la régularité : *la somme de deux termes symétriquement placés vaut toujours* $n+1$, laquelle peut être induite à partir de quelques termes de la somme $S(n)$ seulement. En algèbre, on ne se contente pas de cela et on cherche à exprimer symboliquement la régularité en désignant par i un terme quelconque de la somme : $i + [n - (i-1)] = n+1$. Maintenant, à l'aide de cet élément générique i, on peut retrouver la démonstration précédente mais d'une manière beaucoup plus explicite :

$$2S(n) = \sum_{i=1}^{n} [i + n - (i-1)] = \sum_{i=1}^{n} (n+1) = n(n+1)$$

Par ailleurs, l'emploi d'un tel symbolisme ouvre de nouvelles avenues. Par exemple, on peut chercher à exprimer autrement le double de la somme S(n) :

$$2S(n)=\sum_{i=1}^{n}2i=\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^2-i^2-1\right]=\sum_{i=1}^{i=n}(i+1)^2-\sum_{i=1}^{i=n}i^2-\sum_{i=1}^{i=n}1.$$

Si maintenant on note :

$$S_2(n)=1^2+2^2+.....+n^2,$$

alors il s'ensuit que :

$$2S(n)=\left[S_2(n+1)-1\right]-S_2(n)-n$$
$$2S(n)=\left[S_2(n+1)-S_2(n)\right]-(n+1)$$
$$2S(n)=(n+1)^2-(n+1)=n(n+1)$$

Cette dernière démonstration laisse apparaître un fait remarquable : pour exprimer algébriquement $S(n)$, on a utilisé $S_2(n)$. Il est alors tout naturel de vérifier si l'on peut généraliser cette observation, par exemple si l'on peut calculer $S_2(n)$ à partir de :

$$S_3(n)=1^3+2^3+....+n^3$$

En utilisant le changement de variable $i=j+1$, on constate que :

$$S_3(n+1)=\sum_{i=1}^{n+1}i^3=\sum_{j=0}^{n}(j+1)^3$$

et en développant les facteurs de la dernière somme :

$$S_3(n+1)=\sum_{j=1}^{n}(j^3+3j^2+3j+1)=\sum_{j=1}^{n}j^3+3\sum_{j=1}^{n}j^2+3\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}1$$

on obtient finalement :

$$S_3(n+1)=S_3(n)+3S_2(n)+3S(n)+(n+1)$$

Compte tenu de la valeur de $S(n)$ et de l'égalité : $S_3(n+1)-S_3(n)=(n+1)^3$, on obtient :

$S_3(n)=(n+1)^3-3S(n)-(n+1)$, ce qui donne

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Une fois encore, l'établissent du calcul de $S_2(n)$ à partir de $S_3(n)$ montre que ce processus est généralisable avec $S_k(n) = 1^k + 2^k + ... + n^k$. On obtient en effet :

$$S_{k+1}(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i^{k+1} = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^j = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \sum_{i=0}^{n} i^j = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} S_j(n)$$

où les $\binom{k+1}{j}$ sont les coefficients binomiaux et où on a posé : $S_0(n) = n$.

Il vient alors:

$$(k+1)S_k(n) = S_{k+1}(n+1) - S_{k+1}(n) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n);$$

ce qui donne :

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n)\right]$$

La dernière expression permet de calculer de proche en proche tous les $S_k(n)$.

Nous avons voulu présenter cet exemple en détail pour montrer la puissance de la composante de la pensée algébrique que nous présentons dans cette section, dans la construction de connaissances. Cet exemple illustre, en particulier, qu'en algèbre on a tendance à ne pas se contenter de cerner la généralité, mais à chercher à l'exprimer à l'aide d'une expression algébrique dont la forme permettra souvent de découvrir de nouveaux aspects de la situation et surtout de mener à d'autres généralisations.

Cet aspect de la pensée algébrique est souligné par plusieurs auteurs, au moins de manière implicite. Par exemple, Bell (1996) insiste explicitement sur l'aspect manipulation de symboles dans l'activité algébrique. De leur côté, Al Cuocco et al. (1996) considèrent l'algèbre comme un langage – qui ne sert pas seulement à représenter des objets à l'aide de symboles – et ils présentent la pensée algébrique

comme un ensemble de composantes qui permettent à l'algébriste de se centrer sur les manières de transformer ces symboles.

3.4.4 Habileté à abstraire et à généraliser des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques

Dans cette composante de la pensée algébrique, nous distinguons quatre principales habiletés intellectuelles: 1) l'habileté à appréhender la notion générale d'opération, 2) l'habileté à abstraire et à généraliser des structures algébriques; 3) l'habileté à abstraire et à généraliser des structures de situations réelles ou mathématiques, et 4) l'habileté à généraliser des règles et des procédures algébriques. Présentons chacune d'elles.

Rappelons que dans notre conceptualisation, la notion d'opération joue un rôle fondamental, puisque dans toute activité algébrique doit intervenir au moins une opération. Faire de l'algèbre nécessite d'abord *l'habileté à appréhender la notion générale d'opération*, laquelle, selon nous, fait appel à deux habiletés principales.

La première est *l'habileté à identifier des opérations ainsi que les relations entre elles dans diverses situations.* Pour reconnaître l'existence d'une opération binaire dans une situation quelconque, l'algébriste doit appréhender dans la sémantique même de la situation, l'existence d'une loi de composition (par exemple, la composition de deux translations définit une unique translation, l'addition de deux nombres définit un nombre unique, etc.). Il peut s'agir de reconnaître une opération familière, par exemple l'addition arithmétique, dans diverses situations contextuelles, comme dans les problèmes verbaux, ou de voir l'opération d'adition à la base de la régularité de la suite numérique : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ..., 97, 100. Cette habileté implique aussi qu'il faut pouvoir reconnaître les relations entre les opérations, par exemple voir la soustraction comme l'inverse de l'addition et la multiplication comme l'inverse de la division dans le système des nombres réels.

La deuxième est *l'habileté à reconnaître et à utiliser des propriétés des opérations dans divers types de situations.* Par exemple, dans les systèmes classiques de nombres il est important de reconnaître la propriété de distributivité de l'addition par rapport à la multiplication et de l'utiliser de diverses façons, comme dans le calcul mental : $15 \times 101 = 1500 + 15$. Cette habileté se manifeste aussi dans le fait de reconnaître que certaines propriétés sont communes à plusieurs opérations ou qu'une certaine opération possède une propriété non satisfaite par une autre opération. L'habileté à reconnaître des ressemblances et des différences entre les propriétés de différentes opérations facilite l'identification de systèmes algébriques isomorphes et l'abstraction de la notion de structure algébrique.

Faire de l'algèbre nécessite l'habileté à abstraire et à généraliser des structures algébriques, laquelle fait appel, selon nous, à deux principales habiletés intellectuelles. La première est l'habileté à reconnaître des caractéristiques communes à plusieurs systèmes algébriques et, en particulier, à identifier deux systèmes algébriques isomorphes. Illustrons cette habileté par des exemples. Considérons le cas du groupe à 4 éléments. À un isomorphisme près, on sait qu'il existe seulement deux groupes d'ordre 4, le groupe cyclique $(Z_4, +)$ et le groupe de «Klein» $(Z_2 \times Z_2, +)$. Les tables des opérations de ces deux groupes sont données dans la figure suivante. Pour alléger leur présentation, la première ligne et la première colonne ont été supprimées.

e	a	b	c
a	b	c	e
b	c	e	a
c	e	a	b

Groupe $(Z_4, +)$

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

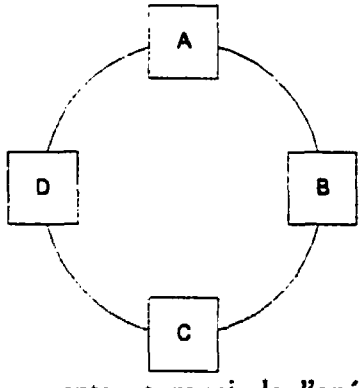
Groupe $(Z_2 \times Z_2, +)$

Figure 3.4 : Tables des groupes d'ordre 4

Chacun de ces deux groupes possède un élément neutre noté e. Le groupe $(Z_4, +)$ contient un seul sous-groupe d'ordre 2 soit $(\{e, b\}, +)$. Le groupe de Klein contient trois sous-groupes d'ordre 2 : $\{e, a\}$, $\{e, b\}$ et $\{e, c\}$ munis de l'addition. Les éléments a, b et c jouent le même rôle dans le groupe de Klein mais non dans $(Z_4, +)$. Ce sont quelques-unes des caractéristiques de ces deux structures algébriques.

On peut rencontrer ces deux groupes dans de nombreuses situations.

1 : Considérons les déplacements dans le sens des aiguilles d'une montre d'un jeton sur les quatre cases d'un chemin circulaire. La position du jeton après un déplacement quelconque est la même que celle après l'un des quatre déplacements suivants :



e : rester sur place

a : avancer d'une case

b : avancer de deux cases

c : avancer de trois cases.

Le système algébrique formé de ces quatre déplacements et muni de l'opération « suivi de » est bien un groupe d'ordre 4 isomorphe à $(Z_4, +)$.

2. E est le système algébrique formé des éléments 0, 1, 2 et 3 et muni de l'opération : $n \oplus m = r$, où r est le reste de la division de $n + m$ par 4. Ce système algébrique constitue aussi une spécification du groupe cyclique d'ordre 4.

3. Considérons deux interrupteurs, l'un rouge et l'autre vert, par exemple[52].

e : correspond à ne pas actionner les interrupteurs

a : correspond à actionner le rouge

[52] Exemple tiré de : Diènes, Z.P. et M.A. Jeeves (1967) *Pensée et structure*. Montréal : O.C.D.L.

b : correspond à actionner les deux

c : correspond à actionner le vert

L'ensemble de ces actions muni de l'opération composition est un système algébrique dont la structure algébrique est celle du groupe de Klein.

4. Dans l'espace à trois dimensions, considérons un repère formé de trois axes perpendiculaires entre eux. Muni de l'opération de composition, l'ensemble formé des rotations de 180° autour de ces trois axes et de la rotation nulle, est un système algébrique dont la structure algébrique est celle du groupe de Klein.

L'habileté à reconnaître des caractéristiques communes à des spécifications est nécessaire pour se rendre compte que les systèmes 1 et 2 ont les mêmes caractéristiques structurales que le groupe cyclique (Z_4 ,+), que les systèmes 3 et 4 sont deux concrétisations du groupe de Klein et que 1 et 3 ne sont pas isomorphes. Cette habileté requiert de porter l'attention exclusivement aux opérations et aux relations, indépendamment de la nature des objets sur lesquels elles sont définies, et de mettre en évidence des relations internes caractérisées essentiellement par les propriétés des opérations et des relations

L'habileté à abstraire et à généraliser une structure algébrique suppose également *l'habileté à voir une structure algébrique comme une abstraction ou comme une généralisation.* Faisons remarquer que bien que les deux processus d'abstraction et de généralisation soient différents, leurs produits sont toujours des généralités. Une structure algébrique peut être vue à la fois comme une abstraction et comme une généralisation. C'est le cas par exemple d'un espace vectoriel E de dimension *n* sur le corps des réels, on peut l'envisager à partir de ce que plusieurs espaces vectoriels de dimension *n* ont en commun indépendamment de leurs objets. On peut également y voir une généralisation obtenue à partir d'espaces vectoriels de dimension 2, 3, 4, etc.. Vu en tant qu'abstraction, l'attention est portée sur les propriétés des opérations et des relations

communes aux différents espaces vectoriels de dimension n indépendamment de leurs objets. Vu en tant que généralisation, l'attention est portée sur les cas particuliers à partir desquels la généralisation est effectuée, soit ici les espaces de deux dimensions (R^2), de trois dimensions (R^3), etc.

Par ailleurs, toute connaissance relative à la structure algébrique se répercute sur ses spécifications. Par exemple, n étant l'ordre d'un groupe et e son élément neutre, sachant que $a^n=e$, pour tout a élément du groupe, on en déduit qu'on a une proposition analogue dans le cas $n = 4$ pour chacun des quatre groupes spécifiques précédents. En outre, la connaissance d'une structure algébrique abstraite permet d'élargir la classe des structures algébriques spécifiques qui ont permis de l'abstraire par la construction de nouveaux éléments.

Dans la suite de ce travail, nous dirons qu'une situation réelle ou mathématique est *algébrisable* si elle peut être modélisée algébriquement, et que deux situations algébrisables sont *isomorphes* si elles peuvent être représentées par un même modèle algébrique.

Faire de l'algèbre nécessite également l'habileté à abstraire et à généraliser des structures de situations réelles ou mathématiques, celle-ci implique à son tour l'habileté à reconnaître des caractéristiques communes à plusieurs situations algébrisables et, en particulier, à reconnaître deux situations algébrisables isomorphes. À des fins d'illustration, considérons les deux problèmes suivants :

<u>Problème 1</u>

Dans une ferme, il y a des poules et des chèvres. En tout, on a compté 25 animaux totalisant 70 pattes. Combien y-a-t-il de chèvres et de poules ?

<u>Problème 2</u>

Dans un restaurant, il y a des tables à 2 places et des tables à 4 places. En tout, on a compté 25 tables totalisant 70 places. Combien y-a-t-il de tables à 4 places et de tables à 2 places ?

Nous avons ici deux situations algébrisables isomorphes. L'algébriste compétent doit être capable de reconnaître que ces deux situations ont la même structure. Bien qu'elles aient des contextes différents, elles ont le même système de relations entre les variables pertinentes. Cette structure commune peut être représentée formellement par le système d'équations: $\begin{cases} 2x+4y=70 \\ x+y=25 \end{cases}$, x et y appartenant à l'ensemble des nombres entiers naturels. À un niveau d'abstraction plus élevé, l'algébriste saisira que les deux situations sont des cas particuliers de cette classe de situations algébrisables dont la structure est représentée par un système de deux équations linéaires indépendantes à deux inconnues. Cette habileté permet de se rendre compte, par exemple, que derrière tous les emplois de la règle de trois en arithmétique, il n'y a jamais eu qu'une fonction linéaire, dont il s'agissait seulement de déterminer l'une des valeurs sous telles ou telles conditions. En une formulette, $y = ax$, l'algèbre met à la portée de notre pensée, la quintessence d'une grande classe de problèmes que l'arithmétique, faute d'une langue appropriée, s'est évertuée à vouloir transmettre sous l'habillage de problèmes pratiques, en en diversifiant les contextes. En particulier, il nous semble que cette habileté a été à la base de la constitution de l'algèbre d'al-Khawarizmi. En effet, rappelons que son projet consistait à proposer des procédés généraux pour la résolution de classes de problèmes. Or, justement, chacune de ces classes est constituée de problèmes issus de situations algébrisables isomorphes, soit celles qui peuvent être modélisées par l'une des six équations canoniques d'al-Khawarizmi. La donnée de ces classes doit évidemment précéder l'élaboration de méthodes générales pour résoudre tous les problèmes qui la constituent. Traditionnellement, l'étude des problèmes verbaux vient après l'enseignement formel de la résolution d'équations. Cela nous apparaît être autant une erreur épistémologique qu'une aberration pédagogique, car la notion d'équation algébrique est une abstraction qu'on ne peut construire qu'à partir de situations algébrisables isomorphes qui amènent les élèves à oublier les objets en jeu et à centrer leur attention sur les relations existant entre les variables, les opérations et relations pertinentes.

Enfin, faire de l'algèbre nécessite *l'habileté à généraliser des règles et des procédures algébriques* (procédure de résolution de problèmes, algorithmes, etc.). Cette habileté peut se manifester, par exemple, quand on est capable de reconnaître le patron dans une situation numérique ou géométrique et de l'utiliser pour faire des prédictions. À titre d'illustration, considérons la situation de pliages successifs d'une feuille de papier en deux moitiés ; le but de l'activité est de trouver le nombre de régions définies après n pliages. Un enfant du primaire ayant développé une telle habileté sera capable de résoudre le problème dans les cas, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et de réussir à prédire la solution pour des valeurs plus grandes de n. Un élève du secondaire ayant développé cette habileté, quant à lui, sera capable de déterminer le nombre de régions en fonction du nombre de pliages, d'exprimer algébriquement la règle et, à un niveau plus avancé, de trouver la règle générale donnant le nombre de régions obtenues après une série de n pliages d'une feuille de papier en m parties.

Dans la résolution de systèmes de n équations linéaires à n inconnues, cette habileté permet également de généraliser une méthode de résolution, par substitutions par exemple, des cas $n = 2, 3, 4$ à n'importe quelle valeur de n.

3.4.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons mis en évidence quatre aspects importants de la pensée algébrique: 1) habileté à penser analytiquement; 2) habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques; 3) habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies et 4) habileté à abstraire et à généraliser des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques. L'habileté à penser analytiquement est une composante fondamentale de la pensée algébrique. En effet, la pensée analytique a joué un rôle crucial à tous les niveaux du développement historique de l'algèbre. C'est elle qui distingue le plus la pensée algébrique de la pensée arithmétique. Chacun des trois autres aspects de la pensée algébrique relate une

habileté intellectuelle nécessaire quand on fait de l'algèbre dans le cadre d'un des aspects de l'algèbre ; le lien entre l'algèbre et la pensée algébrique est ainsi clarifié.

Remarquons que ces composantes de la pensée algébrique ne sont pas exclusives à l'algèbre. Elles peuvent se retrouver dans d'autres types d'activités mathématiques.

3.5 MODÈLE INTÉGRATEUR DE L'ALGÈBRE ET DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE

Les deux figures 3.5 et 3.6 illustrent notre modèle intégrateur de l'algèbre et de la pensée algébrique (M.I.A.P.A.). Il s'agit d'un modèle théorique dans *lequel l'algèbre et la pensée algébrique sont représentées comme les deux faces d'une même médaille (ou d'une pièce de monnaie).* Nous utilisons cette métaphore pour souligner le fait que l'algèbre et la pensée algébrique sont différentes mais indissociables l'une de l'autre. On ne peut, en effet, construire un sens de l'une sans faire appel à l'autre. L'algèbre apparaît comme un type d'activités mathématiques et la pensée algébrique comme un ensemble d'habiletés intellectuelles nécessaires dans ces activités.

Pour marquer le rôle central que joue l'«habileté à penser analytiquement» dans la pensée algébrique, nous l'avons représentée au centre du modèle. Chacune des trois autres composantes de la face pensée algébrique correspond plus particulièrement, mais non exclusivement, à l'une ou l'autre des trois composantes de la face algèbre du M.I.A.P.A.

Rappelons que M.I.A.P.A. ne prétend pas donner une définition de l'algèbre et de la pensée algébrique. C'est un cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique que nous avons élaboré en nous appuyant sur la revue de l'histoire du développement de l'algèbre présentée au chapitre 2 et sur une analyse épistémologique de l'activité algébrique. Il servira de référence pour élaborer des approches didactiques pour l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base.

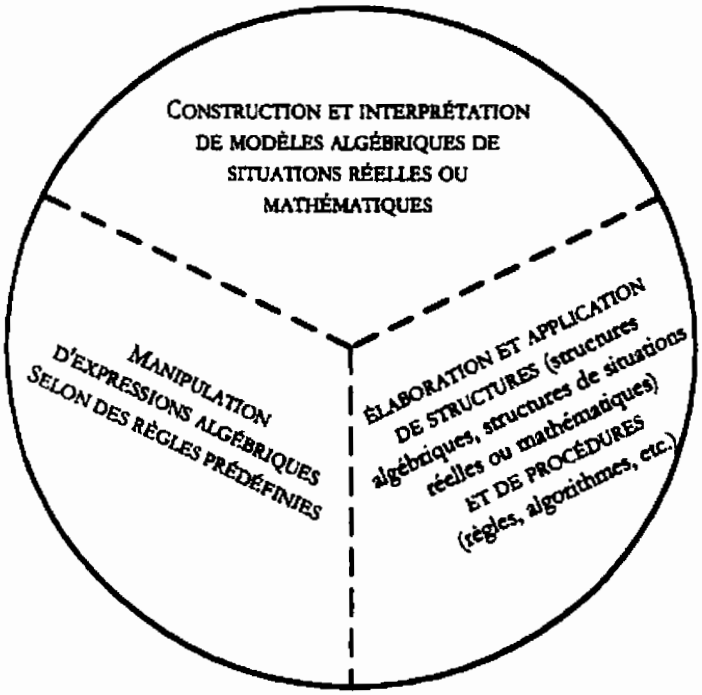


Figure 3.5 : Face algèbre du M.I.A.P.A

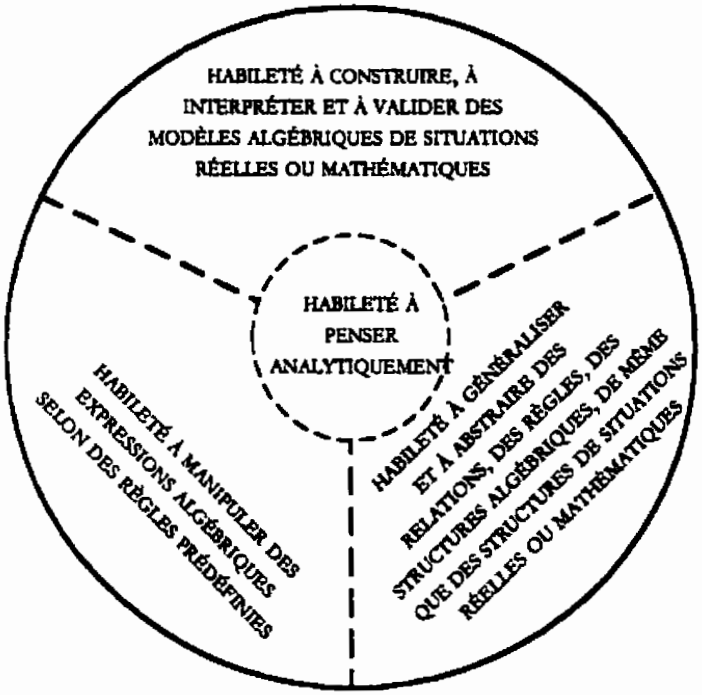


Figure 3.6 : Face pensée algébrique du M.I.A.P.A

Rappelons que dans notre conceptualisation, le concept d'opération joue un rôle fondamental. C'est à partir de ce concept que nous avons d'abord limité le champ de l'algèbre. En effet, nous ne parlons d'algèbre que lorsqu'au moins une opération est en jeu dans l'activité. En outre, ce concept nous a permis de définir les termes de base : système algébrique, expression algébrique, équation et inéquation, forme propositionnelle algébrique, espace de calcul algébrique, modèle algébrique, structure algébrique, situation algébrisable, etc.

3.6 COMPARAISON DU MODÈLE THÉORIQUE PROPOSÉ AVEC LES POINTS DE VUE D'AUTRES AUTEURS

Dans cette section, nous allons comparer notre modèle théorique M.I.A.P.A à des propositions d'autres auteurs. Nous examinerons d'abord la proposition de Lins, qui a été le seul, à notre connaissance, à caractériser explicitement la pensée algébrique. Ensuite, nous analyserons une proposition du groupe de travail sur l'algèbre du *National Council of Teachers of Mathematics*, et, enfin, l'importante contribution de Kaput.

3.6.1 La caractérisation explicite de la pensée algébrique de Romulo Lins

Se basant sur une étude historique du développement de l'algèbre et de considérations épistémologiques, Lins affirme dans son travail de thèse que :

«To think algebraically is, (i) to think ARITHMETICALLY, and (ii) to think INTERNALLY, and (iii) to think ANALITICALLY» (Lins, 1992, p. 56).

Selon lui, le premier critère (« to think ARITHMETICALLY ») est nécessaire à la fois pour caractériser l'absence des processus impliquant la notion de limite, dans le sens du calcul différentiel, et POUR rappeler que les opérations arithmétiques constituent un modèle fondamental pour la compréhension des opérations algébriques. Le second critère (« to think INTERNALLY ») signifie que l'on opère exclusivement dans un

champ sémantique numérique, à l'opposé par exemple d'associer des nombres – en tant que mesures – à des segments et de justifier ainsi la manipulation de relations arithmético-algébriques (Lins, 1992). IL est nécessaire, nous dit Lins, pour distinguer la pensée algébrique d'autres modes de pensée qui peuvent être utilisés dans la production de l'algèbre. Le troisième critère (to think ANALYTICALLY ») met en évidence le caractère analytique de la pensée algébrique.

Dans sa thèse, Lins soutient que la production d'un résultat algébrique ne met pas nécessairement en jeu la pensée algébrique ni l'utilisation du symbolisme algébrique. Cependant, il n'explique pas ce qu'il entend par algèbre.

Comme le montrent les parties (i) et (ii) de sa définition de «penser algébriquement», il ne considère que les espaces algébriques numériques. Cela nous semble une limitation trop forte de l'algèbre et, par conséquent, de la pensée algébrique. En mathématiques, il existe d'autres types d'opérations que les opérations arithmétiques usuelles. On a peut être trop exagéré l'importance de l'arithmétique dans l'introduction de l'algèbre. Il est bien connu maintenant que le passage d'un stade arithmétique à un stade algébrique est loin d'être facile à réaliser par les élèves. De récentes recherches ont mis en évidence certains changements conceptuels et/ou symboliques qui marquent la différence entre le raisonnement arithmétique et le raisonnement algébrique (Filloy et Sutherland, 1996). Plusieurs explications ont été avancées, dont on trouvera un bon échantillon dans Kieran (1992). Filloy et Sutherland (1996), par exemple, pensent que les difficultés associées à la transition de l'arithmétique à l'algèbre semblent persister, peu importe que l'on introduise l'algèbre comme un prolongement naturel de l'arithmétique à partir des premières années d'étude, ou comme un sujet séparé d'étude débutant plus tard dans le cursus scolaire.

Par ailleurs, Lins ne caractérise que la pensée algébrique. Il dit qu'elle est différente de l'algèbre, mais il ne précise pas davantage ce qu'il entend par cette dernière, ni les liens qui existent entre les deux. Bell (1992), le directeur de thèse de Lins, interprète la

pensée algébrique telle que Lins l'a définie comme une pensée permettant de résoudre des problèmes arithmétiques complexes en travaillant d'une manière flexible avec des relations dans le système des nombres rationnels ou réels. Selon lui, une telle forme de pensée existe certainement et Lins l'a montré par une analyse effective de solutions d'élèves; cependant, ajoute-t-il : «I would prefer (...) to call this complex arithmetic problem-solving, and to reserve the term Algebraic for cases in which symbolism is used.» (Bell 1992).

En conclusion, il nous semble que la recherche de Lins a le mérite de bien mettre en évidence l'importance de la composante pensée analytique dans la pensée algébrique, mais qu'elle laisse de côté d'autres aspects importants de cette dernière, comme l'habilité à construire, à interpréter et à valider des modèles de situations réelles ou mathématiques.

3.6.2 La proposition du groupe de travail sur l'algèbre (AWG) du NCTM

En 1994, le NCTM[53] a mis sur pied le groupe de travail «Algebra Working Group» (AWG) avec le mandat suivant :

> (...) to produce a document that: expands the vision of algebra for all that begins with experiences in early elementary school and extends through secondary school; elaborates this vision by including examples, practical ideas and promising practices, and helps teachers and school systems raise questions about the process of change. (NCTM, 1995, p. 2)

Le groupe AWG était constitué d'une dizaine de personnes oeuvrant en mathématiques ou en éducation mathématique. En 1994, il a produit un premier document, qui a été révisé en 1995 et en 1997. Ce groupe semble s'être largement inspiré des travaux de Jim Kaput, notamment de sa vision de l'algèbre que nous allons présenter dans la section suivante.

---

[53] NCTM est le sigle du « National Council of Teachers of Mathematics » la plus importante association d'enseignants de mathématiques en Amérique du Nord.

Dans son document, le comité propose un cadre de référence (figure 3.7) pour l'enseignement de l'algèbre à l'école au moyen de l'exploration d'une variété de *contextes* («contextual settings») connectés entre eux par des *thèmes organisateurs*. Au chapitre 6, nous en analyserons les aspects didactiques plus en détail. Pour le moment, nous allons nous limiter à préciser le sens qu'on y donne à l'algèbre et à la pensée algébrique.

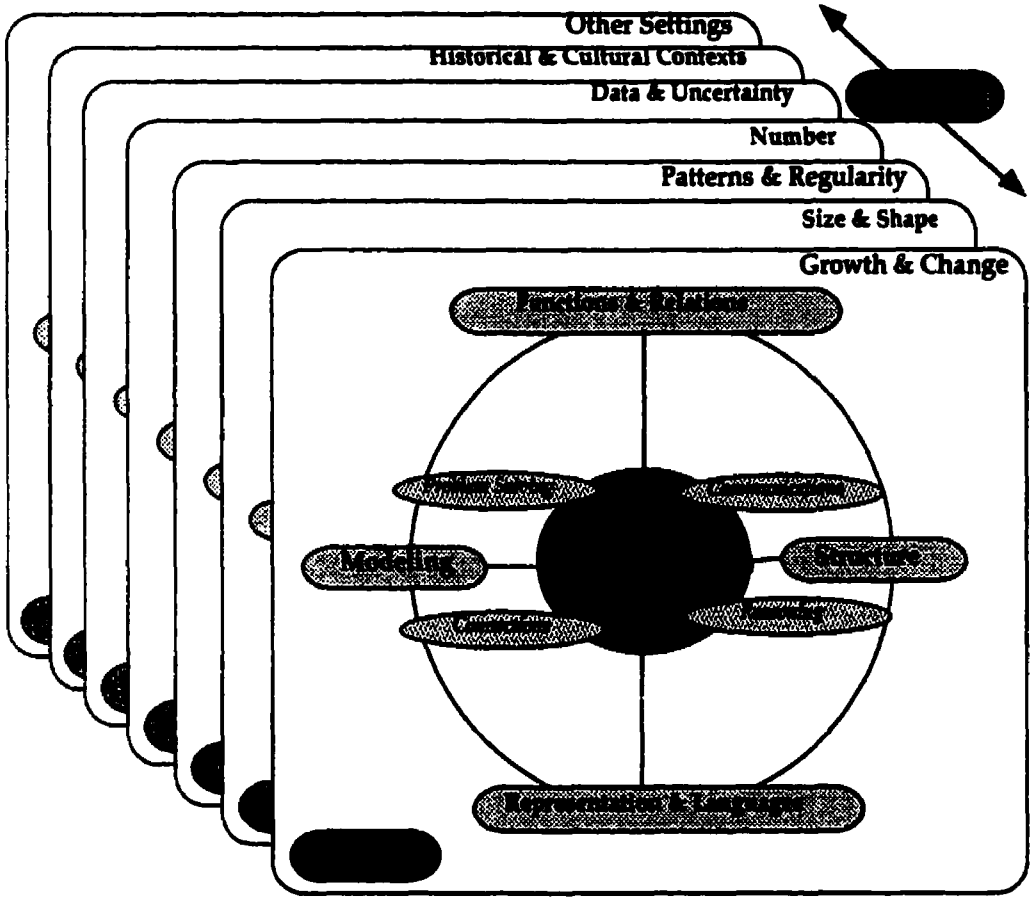


Figure 3.7 : A framework for constructing a Vision of Algebra

Le groupe AWG précise que les thèmes sur lesquels ont été basées les transpositions didactiques antérieures n'ont pas cessé de changer suivant les époques. Ainsi explique-t-il :

> The «new math» of the 60's was based on structure. This was followed by a «back to the basics» movement, based heavily on thinking of algebra as a language. In the 90's with the emergence of the graphing calculator, the concepts of function and modeling have become the central point for conceptualizing algebra (NCTM, 1997, p. 9).

Il propose d'organiser le curriculum d'algèbre à l'école selon les quatre *thèmes organisateurs* qui figurent dans la figure 3.7 : *Functions and Relations*, *Structure*, *Modeling* et *Representation and Languages*. (Il précise toutefois qu'il ne s'agit pas là nécessairement d'une liste exhaustive.)

À propos du thème *Functions and Relations*, les auteurs écrivent :

> The central mathematical concept of function and its variant, a mathematical relation underlies the equations, tables, and graphs so common to algebra. Functions, and the related concept of variable, give organized ways of thinking about an enormous variety of mathematical settings. (NCTM, 1995, p. 16)

Remarquons que le concept de fonction n'est pas un concept intrinsèquement algébrique. Il est l'un des concepts unificateurs des mathématiques – comme celui d'ensemble – et il se retrouve souvent au centre de diverses activités mathématiques non nécessairement algébriques. Le groupe de travail ne précise pas ce qu'il entend par fonction et par relation mathématique faisant partie de l'algèbre, alors que dans notre cadre conceptuel, nous avons été clair à ce sujet. En effet, pour nous, une fonction fait partie de l'algèbre seulement dans les trois cas suivants : 1) sa règle peut être représentée par une expression algébrique, 2) la fonction est elle-même élément d'un système algébrique (espace fonctionnel sur lequel sont définies une ou plusieurs opérations, par exemple la composition de fonctions, dans ce cas la fonction est vue globalement comme un objet), et 3) la fonction est elle-même une opération définie sur un ensemble. Pour nous, une relation fonctionnelle n'est algébrique que dans le cas où elle peut s'exprimer au moyen d'une expression algébrique. Par exemple, $y = \sin(x)$ n'est pas une relation fonctionnelle algébrique, car le second membre de cette égalité ne peut jamais être décrit au moyen d'une expression algébrique (une combinaison d'un nombre fini de termes de variables et d'opérations) dans le système des nombres réels.

En ce qui concerne les thèmes *Structure* et *Modeling*, les auteurs emploient le terme structure tantôt pour signifier une structure algébrique : «Organizing algebra around structure implies thinking about how systems operate ; for instance, what enabling

characteristics of a system allows fractions to be combined or equations to be solved ?» (NCTM, 1995, p. 18), tantôt pour signifier la structure d'une situation mathématique (modèle, une régularité, etc.) : «The study of structures is a means of focusing on common aspects of many mathematical situations» (*ibid.*).

En ce qui concerne le thème *Representation and Languages* les auteurs expliquent :

> Algebra can be seen as a language – with its various "dialect" of literal symbols, graphs, and tables. For instance, algebra can be seen as a language for generalizing arithmetic. (NCTM, 1995, p. 10)

Ils ajoutent plus loin :

> Algebra is a way of thinking about and representing many situations. It has a language and a syntax, along with tools and procedures that promote this thinking and modeling.
> (...) Its [the theme of language and representation] central feature is the use of symbols to translate and represent situations. (NCTM, 1995, p. 19)

Dans le modèle M.I.A.P.A., l'aspect langage de l'algèbre est implicite. Par contre, sa dimension syntaxique est représentée explicitement dans la composante «manipulation d'expressions algébrique selon des règles prédéfinies».

On trouvera peut-être remarquable la ressemblance entre les thèmes organisateurs proposés par le groupe AWG et les aspects de notre modèle M.I.A.P.A. Cette relative similitude montre combien ces aspects sont caractéristiques de l'activité algébrique et vient appuyer les résultats de notre analyse de l'algèbre, que nous avons réalisée de manière tout à fait indépendante des travaux de ce groupe.

Par contre, il existe des différences notables entre les deux propositions. Une différence importante réside dans l'approche épistémologique de l'algèbre, de la pensée algébrique et des liens entre les deux. Rappelons que pour nous l'algèbre et la pensée algébrique sont, comme les deux faces d'un même médaille, solidaires l'une de l'autre et complémentaires. La première désigne un certain type d'activité mathématique, la seconde désigne un ensemble d'habiletés intellectuelles majeures, nécessaires dans cette activité. Pour le groupe du NCTM, en revanche, «algebra is a system of concepts and

ways of thinking — both with these concepts and about them.» (NCTM, 1994, p. 7). Cette manière d'approcher l'algèbre et la pensée algébrique laisserait entendre, comme le fait remarquer Lee (1995), que la pensée algébrique vient après la donnée d'un système de concepts. Or, il ressort de notre analyse épistémologique, que, par exemple, le développement du concept d'inconnue en algèbre est dû principalement à la tendance à penser analytiquement, une composante essentielle de la pensée algébrique. De même, l'émergence du concept d'équation est issue notamment des tendances à penser analytiquement et à chercher des algorithmes de résolution (donc à généraliser). Cette analyse épistémologique nous a conduit à postuler que c'est la recherche d'algorithmes de résolutions d'équations à une inconnue et la nécessité de raisonner analytiquement qui ont motivé le projet algébrique d'al-Khawarizmi ayant abouti à l'émergence de l'algèbre comme discipline autonome. *En fait, l'algèbre et la pensée algébrique se développent concurremment, chacune profitant du progrès de l'autre.* Par exemple, nous avons souligné au chapitre 2 que l'usage des lettres pour désigner à la fois une inconnue et des nombres donnés a été dans l'histoire essentiellement motivée par la tendance à penser analytiquement et qu'en retour, l'algèbre symbolique est devenue un terrain très fertile pour le développement de la pensée algébrique elle-même.

Par ailleurs, bien que le groupe du NCTM déclare que son cadre de référence fournit un moyen pour développer le raisonnement algébrique des élèves, il n'explique pas clairement ce qu'il entend par raisonnement algébrique ni par pensée algébrique, se contentant d'affirmer qu'ils se trouvent enracinés dans des contextes («contextual settings»). À la suite de chaque exemple, il consacre une section appelée *Where is the Algebra*, où il tente de montrer comment l'exemple en question «évoque» le raisonnement algébrique.

3.6.3 La proposition de Jim Kaput

Depuis plusieurs années, cet auteur tente d'élaborer une nouvelle vision de l'algèbre à l'école. Il a publié un certain nombre d'écrits et présenté de nombreuses

communications dans des rencontres internationales à ce sujet. Ses propositions concernant la nature de l'algèbre et de la pensée algébrique ont évolué significativement au fil des ans. Nous discutons ici la dernière proposition qu'il a présentée, en octobre 1995, lors de la rencontre annuelle du groupe nord-américain PME-NA. Bien que sur certains aspects, la proposition de Kaput semble voisine de notre modèle M.I.A.P.A., nous avons élaboré ce dernier de façon complètement indépendante, il y a de nombreuses années.

Pour décrire l'algèbre, Kaput dit qu'il est nécessaire d'envisager les mathématiques selon une double perspective. Il écrit en effet,

> Talk about mathematics often slips between mathematics as implicitly shared cultural artifacts — objects, procedures, relations independent of any individual — as when we talk about learning functions, polynomials, factoring, ring theory, linear algebra, and so on — and mathematics as ways of thinking — generalizing, specializing, abstracting, computing, analogizing, justifying, and so on. To describe algebra requires mixing both types of talk. (Kaput, 1995b, p. 74)

Insistant sur l'importance de prendre en considération une variété de «significations» de l'algèbre, il en décrit cinq aspects – ou cinq formes interreliées du raisonnement algébrique, comme il l'a écrit plus tard dans (Kaput, 1998) :

> • [Kernel] Algebra as Generalizing and Formalizing Patterns and Constraints, especially, but not exclusively Algebra as Generalized Arithmetic Reasoning and Algebra as Generalized Quantitative Reasoning
> • [Kernel] Algebra as Syntactically Guided Manipulation of (opaque) Formalisms
> • [Mathematical Topic] Algebra as the Study of Structures Abstracted from Computations and Relations
> • [Mathematical Topic] Algebra as the study of Functions, Relations and Joint Variation
> • Algebra as a Cluster of Modeling Languages and Phenomena-Controlling languages. (Kaput, 1995b)

Les deux premiers aspects, dit-il, constituent le noyau du raisonnement algébrique, et se retrouvent dans tous les autres aspects. Les deuxième et troisième aspect sont des sujets mathématiques importants alors que le dernier aspect présente l'algèbre comme

un tissu de langages. Il précise ensuite : «all the aspects should be regarded as loosely spun and richly interwoven – they are by no means separate» (Kaput, 1995b, p. 74)

Présentant le premier aspect, il explique que la généralisation et la formalisation sont des caractéristiques intrinsèques de la majorité des activités mathématiques et qu'elles sont utilisées en algèbre pour généraliser le raisonnement arithmétique (cadre purement mathématique) ou le raisonnement quantitatif (cadre non mathématique) :

> Generalizing in arithmetic (numerical patterns, arithmagons, etc.) begins within a mathematical system, (often) the system of integer, their properties and operations, where understanding of the mathematical structures plays the core constraining role; quantitative reasoning is based in mathematizing situations and offers a different basis for generalizing and formalizing, where understanding of the semantics of the situation plays the core constraining role.
> Both the means and the goal of generalizing is to establish some formal symbolic objects that are intended to represent what is generalized and render the generalizations subject to further reasoning, perhaps aided by computation – where the computations are at least temporarily guided by syntax and patterns associated with the formal system rather than what is formalized. (Kaput, 1995b, p. 74).

Le premier aspect décrit par Kaput (Algebra as Generalizing and Formalizing Patterns and Constraints, ...) est bien couvert par le modèle M.I.A.P.A., notamment par la composante de la face algèbre «Élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.)» ainsi que la composante de la face pensée algébrique «Habileté à abstraire et à généraliser des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques».

Le second aspect décrit par Kaput (Algebra as Syntactically Guided Manipulation of (opaque) Formalisms) fait référence explicitement à la composante «Manipulation d'expressions algébriques selon des règles prédéfinies» de la face algèbre de M.I.A.P.A et à «l'habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies», de sa face pensée algébrique.

Le troisième aspect (Algebra as the Study of Structures Abstracted from Computations and Relations) fait référence à la composante «Élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.)» de la face algèbre de M.I.A.P.A. Comme dans notre cadre conceptuel, Kaput utilise le terme structure dans les deux sens : structure algébrique («structures abstracted from computations») et structure de situation («structures abstracted from relations»).

Le quatrième aspect décrit par Kaput (Algebra as the study of Functions, Relations and Joint Variation) est aussi couvert par notre modèle M.I.A.P.A. On rencontre les fonctions dans diverses activités, dans la modélisation (une fonction peut être le modèle d'une situation réelle ou mathématique) ou quand on fait varier les variables dans une expression algébrique. Dans le chapitre 6, nous allons présenter une approche didactique de l'algèbre basée sur le concept de fonction.

Le cinquième et dernier aspect décrit par Kaput (Algebra as a Cluster of Modeling Languages and Phenomena-Controlling languages) souligne l'importance en algèbre de l'aspect modélisation, lequel se réfère explicitement à la composante «Construction et interprétation de modèles de situations réelles ou mathématiques» de la face algèbre de M.I.A.P.A. Dans la présentation de cet aspect, Kaput insiste sur l'utilité, d'un point de vue didactique, d'activités de modélisation assistées par ordinateur de phénomènes physiques tel que le mouvement d'un mobile, activités qui amènent les élèves à construire des modèles algébriques de phénomènes physiques et à tester leur validité.

En conclusion, il nous semble que notre modèle intègre bien les éléments de la proposition de Kaput, et fournit des éclairages supplémentaires sur les aspects de l'algèbre et de la pensée algébrique. Kaput ne semble pas insister sur l'importance de l'habileté à penser analytiquement, pourtant très caractéristique de la pensée algébrique et que d'autres auteurs ont souligné. Notre cadre conceptuel semble plus précis que celui de Kaput, du fait que contrairement à lui, nous avons précisé la signification des

termes que nous utilisons. Ainsi lorsqu'il parle de fonction, il ne prend pas la peine d'en limiter le sens et on ne sait pas s'il inclut en algèbre les fonctions trigonométriques, différentielles, etc.

3.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, en nous basant principalement sur les données historiques du chapitre 2 ainsi que sur des réflexions personnelles, nous avons d'abord exposé notre vision de l'algèbre et de la pensée algébrique, puis nous avons présenté notre modèle intégrateur M.I.A.P.A. où l'algèbre et la pensée algébrique sont représentées comme les deux faces d'une même médaille. L'algèbre apparaît comme un type d'activités mathématiques et la pensée algébrique comme un ensemble d'habiletés intellectuelles intervenant dans ces activités. La face algèbre est formée de trois composantes : 1) Construction et interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques ; 2) Manipulation d'expressions algébriques en suivant des règles prédéfinies et 3) Élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.). La face pensée algébrique est formée de quatre composantes : 1) habileté à penser analytiquement; 2) habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques; 3) habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies et 4) habileté à généraliser et à abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques. Nous avons mis l'habileté à penser analytiquement au centre pour souligner le caractère analytique de la pensée algébrique et le rôle crucial qu'a joué la pensée analytique à tous les niveaux du développement historique de l'algèbre. Chacune des trois autres composantes de la face pensée algébrique indique une habileté intellectuelle qui intervient de façon caractéristique quand on fait de l'algèbre dans le cadre de l'un des aspects de la face algèbre. Le lien intime qui existe entre l'algèbre et la pensée algébrique dans M.I.A.P.A est ainsi tout à

fait manifeste. À notre connaissance, aucun autre auteur n'a caractérisé aussi clairement l'algèbre et la pensée algébrique, en les distinguant l'une de l'autre et en précisant explicitement les liens qui les unissent. Par rapport à notre M.I.A.P.A, les propositions de Lins, du groupe de travail AWG du NCTM et de Kaput, concernant la nature de l'algèbre et de la pensée algébrique restent partielles, mettent l'accent sur un aspect particulier de l'algèbre ou de la pensée algébrique, ou encore omettant un de leurs aspects essentiels.

Chapitre 4

L'algèbre et la pensée algébrique en tant que composantes incontournables de l'éducation mathématique de base

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre vient compléter le cadre conceptuel de cette thèse, dont l'objectif (voir 1.4) est de mener une étude approfondie visant à reconceptualiser le curriculum d'algèbre pour tous dans l'éducation de base. Dans ce qui suit, nous commencerons par apporter quelques précisions concernant la notion de l'éducation de base. Ensuite, nous présenterons quelques arguments pour justifier l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base.

4.2 L'ÉDUCATION DE BASE À L'ÉCOLE

L'UNESCO définit l'éducation de base (ou éducation fondamentale) comme suit :

> Éducation destinée à répondre aux besoins éducatifs fondamentaux. Elle comprend l'instruction au premier niveau ou niveau initial sur laquelle peut se fonder l'apprentissage ultérieur; elle englobe l'éducation de la première enfance et l'enseignement primaire (élémentaire) dispensé aux enfants, ainsi que l'éducation des jeunes et des adultes par l'alphabétisation, l'instruction générale et l'enseignement de savoir-faire utiles; elle peut s'étendre à l'enseignement secondaire dans certains pays. (UNESCO, 1993, p. 47)

Le Dictionnaire actuel de l'éducation la définit ainsi:

> Éducation dont l'objet est de répondre aux besoins éducatifs fondamentaux; premier niveau d'instruction ou niveau de base pouvant servir d'assise à des apprentissages plus poussés; source même du développement humain. (Legendre, 1993, p. 447)

Une éducation de base répond à des besoins fondamentaux des individus :

> Ces besoins comprennent à la fois les outils d'apprentissage essentiels (lecture et écriture, expression orale, aptitude numérique et résolution de problèmes) et les contenus fondamentaux (connaissances, compétences, valeurs et attitudes) nécessaires aux êtres humains pour pouvoir survivre, développer toutes leurs facultés, vivre et travailler dans la dignité, participer pleinement au développement, améliorer leur qualité de vie, prendre des décisions éclairées et continuer à apprendre. (*ibid.*)

Elle répond également à des besoins fondamentaux de la société. Il ne s'agit pas simplement d'une question de démocratie, mais également d'une question de survie et de perpétuation de la société. En effet, pour maintenir et développer les institutions administratives, politiques, économiques et culturelles, il est nécessaire de préparer les hommes et les femmes à s'acquitter des tâches qui s'imposent. Et, pour que les citoyens puissent participer à la gestion de la cité et aux décisions stratégiques de la société, il faut qu'ils soient dotés d'une éducation minimale de base.

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons comme synonymes les expressions *éducation de base* et *éducation fondamentale.*

Interrogeons-nous maintenant sur les finalités de l'éducation de base. D'une part, l'éducation de base a comme objectif de former le futur adulte; d'autre part elle doit tenir compte des besoins immédiats de l'enfant. En principe, elle doit *assister ce dernier dans son développement et lui permettre d'avoir une vie riche et motivante.* D'autre part, on s'accorde généralement pour dire que l'éducation de base a pour ultime finalité que *tous les membres de la société aient une éducation minimale qui leur permette de jouer pleinement leur rôle de citoyens, de participer au développement et au progrès de leur société et de vivre une vie décente.*

Il faut prendre garde de définir l'éducation de base uniquement à partir d'une analyse des besoins actuels de la société, sans tenir compte de son évolution future. Même si l'éducation fondamentale comporte immanquablement une part d'anticipation, un fait demeure : au terme de cette formation, les élèves devront répondre aux souhaits et exigences de leur société à l'époque où ils seront actifs.

Par ailleurs, l'un des fondements de l'éducation de base est son caractère d'universalité. C'est-à-dire que *tous* les citoyens doivent recevoir cette éducation minimale de base. En théorie, dans une société démocratique, une éducation de base formelle est forcément universelle, du fait que la scolarité obligatoire est généralisée, c'est-à-dire que tous les enfants à un âge approprié accèdent à l'école de base. On voit ainsi que toute éducation fondamentale présuppose le principe de la généralisation de l'enseignement.

Une éducation de base n'est donc pas une éducation d'élite. En principe, elle doit forcément s'adresser à *tous* les enfants. *L'éducation de base dont il est question dans notre travail devrait donc s'adresser à tous les enfants* – sauf, bien sûr, à un petit nombre d'enfants gravement handicapés[54] qui auront besoin d'une éducation fondamentale adaptée et spécialisée.

Coombs introduit la distinction suivante :

> • *Éducation informelle.* Processus relativement non organisé et non systématique grâce auquel chaque individu acquiert des attitudes, des valeurs, des connaissances théoriques et pratiques par l'expérience quotidienne et l'influence éducative de son environnement.
> • *Éducation formelle.* Processus hiérarchiquement structuré et chronologiquement gradué qui se poursuit de l'école primaire à l'université en passant par l'école secondaire et comprend un enseignement général, technique et professionnel.
> • *Éducation non formelle.* Toute activité éducative organisée en dehors du système scolaire à l'intention d'élèves déterminés et en fonction d'objectifs précis. (Cité dans Brooms, 1981, p. 53)

L'éducation de base s'acquiert selon ces trois modes à la fois : éducation formelle (centres de la petite enfance, école primaire et dans certains pays une partie de l'école secondaire), éducation non formelle (clubs et associations diverses, programmes d'alphabétisation, etc.) et éducation informelle (par l'expérience quotidienne, par l'intermédiaire des médias et de l'action sociale, etc.).

Dans la suite de la thèse, l'expression *éducation de base* sera utilisée dans le sens d'une éducation de base formelle, prise en charge pas le système scolaire. En outre, nous utiliserons l'expression *scolarité obligatoire* pour désigner la période durant laquelle l'éducation de base formelle est réalisée.

À sa sortie de l'école de base, chaque individu doit pouvoir poursuivre des études plus poussées ou suivre une formation aboutissant à un emploi, et posséder les outils nécessaires pour vivre et agir en acteur social éclairé. Longtemps, sauf dans de rares exceptions, l'éducation de base était réalisée entièrement à l'école primaire, soit une

---

[54] La définition d'un enfant gravement handicapé n'est pas simple. Elle varie selon les endroits.

scolarité obligatoire de cinq ou six années d'étude, comme c'est le cas encore pour certains pays en développement. Suite à la démocratisation de l'éducation, aux bouleversements technologiques et autres changements rapides qui se produisent dans la plupart des sociétés, la scolarité obligatoire est, dans la majorité des pays, de neuf années d'étude, et même au-delà pour certains d'entre eux. Ainsi, l'école secondaire est devenue un lieu d'éducation fondamentale.

Arrêtons-nous maintenant brièvement sur les principales matières à enseigner dans l'éducation de base. Une lecture cursive des contenus de l'éducation de base dans beaucoup de pays montre qu'il existe un certain consensus, au plan international, sur le fait que l'apprentissage de la langue et celui des mathématiques font partie du noyau dur de l'éducation de base pour tous les citoyens. Les savoir lire, savoir écrire et savoir compter sont, en effet, des habiletés de base acceptées universellement et largement enracinées dans la culture populaire dans toutes les sociétés. Ceux qui ne les maîtrisent pas sont considérés comme des analphabètes.

En plus de la langue et des mathématiques, d'autres matières viennent contribuer à l'éducation de base : histoire, éducation morale et religieuse, sciences naturelles, arts, géographie, langue seconde, éducation physique, etc. Leur choix et leur importance relative varient selon les pays et les époques, et au gré des modes et des réformes en éducation.

Pour les besoins de notre travail, ce qu'il importe de retenir, c'est que de façon universelle, les mathématiques occupent une place privilégiée dans l'éducation de base. D'où la nécessité d'une bonne éducation mathématique de base pour tous.

4.3 OBJECTIFS VISÉS DANS L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE DE BASE

Les mathématiques font partie des disciplines scolaires traditionnellement enseignées à l'école. Il n'a jamais été question de bannir les mathématiques du curriculum de l'école.

La demande des plus sceptiques est de revoir à la baisse les contenus mathématiques enseignés et de ne pas obliger tous les élèves à apprendre des mathématiques dont une minorité seulement se servira plus tard. Les points de vue à ce sujet sont largement influencés par les conceptions que se font ces personnes des mathématiques et surtout de leur rôle dans l'école et dans la société.

Le grand public perçoit les mathématiques comme étant omniprésentes, dans les objets techniques, l'informatique, les laboratoires, les sondages, l'économie, etc., sans jamais être très visibles. Tous les reconnaissent comme passage obligé dans la formation des élèves et dans l'accès à la formation à un emploi, tout en constatant que, devenus adultes, ils n'en utiliseront que quelques rudiments. Pourquoi alors enseigner tant de mathématiques à tant d'enfants, se demandent les plus sceptiques ? D'autant plus qu'actuellement des machines sont disponibles – et à bon marché – capables d'exécuter des calculs des plus simples aux plus compliqués. Même dans la vie professionnelle de la majorité des individus, peu de mathématiques sont directement utilisées; celles qui le sont correspondent soit à quelques rudiments que l'on apprend à l'école primaire, soit à des techniques spécialisées dont l'usage ne nécessite pas une compréhension approfondie.

À notre avis, il faut prendre garde de conclure trop rapidement que, d'une part, dans l'éducation de base on ne doit enseigner que des mathématiques dont les élèves vont se servir plus tard et que, d'autre part, il est inutile que l'école se charge de leur apprendre ce que des machines peuvent faire à leur place. Certes les machines, en l'occurrence la calculatrice et l'ordinateur, sont capables maintenant d'exécuter des tâches mathématiques, comme des calculs compliqués, des manipulations symboliques, des représentations graphiques, qu'il serait très ardu de faire à la main. En cela, elles agissent comme des *amplificateurs culturels*, en ce sens qu'elles augmentent notre pouvoir de faire et d'appliquer des mathématiques. Cependant, comme la disponibilité de l'automobile ne dispense pas de la nécessité de savoir marcher, et celle des logiciels de traitement de texte ne dispense pas du besoin de savoir écrire, les calculatrices et les

ordinateurs, aussi disponibles et puissants qu'ils soient, ne dispenseront jamais les gens d'avoir une certaine connaissance en mathématiques.

Par ailleurs, il faut prendre garde lorsqu'on invoque un argument basé sur une analyse des besoins actuels de l'adulte ou de la société. En effet, le monde de l'enfant lorsqu'il deviendra adulte sera certainement différent de celui d'aujourd'hui. Il faut tout particulièrement prendre en compte les reconversions professionnelles que de nombreux individus devront affronter et qui nécessiteront souvent des connaissances plus larges et plus approfondies en mathématiques. Dans ce sens, comme l'avance Charnay (1996), les mathématiques utiles ne se limitent pas à celles qui seront directement utilisées, elles doivent également fournir la base de compléments ou d'approfondissements ultérieurs. Dans l'éducation de base, il s'agit de faire en sorte que les élèves disposent de connaissances précises et aussi de les armer pour leur permettre d'enrichir ces connaissances (Charnay, 1996).

Dans la communauté des éducateurs, les arguments avancés pour justifier l'enseignement des mathématiques, notamment dans le cadre de l'éducation de base, ont varié au cours du temps. Lavoie (1994) rapporte que le discours traditionnel, qui a fini par passer dans l'opinion populaire, affirme que les mathématiques sont enseignées *parce qu'elles formeraient l'esprit, qu'elles seraient utiles dans la vie de tous les jours* et *qu'elles serviraient dans les techniques et les sciences.*

Selon cet auteur, au 19ème siècle on acceptait comme allant de soi que les mathématiques forment l'esprit. Selon des conceptions psychologiques et pédagogiques de l'époque, le cerveau était considéré comme un muscle qu'il était possible d'entraîner (*op. cit.*). Il ajoute : «certains cerveaux étaient sans doute mieux pourvus que d'autres puisque, selon des théories phrénologiques, on croyait avoir repéré la "bosse" des mathématiques à l'extrémité des arcades sourcilières» (Lavoie, 1994, pp. 12-13). De nos jours encore, certains enseignants disent à leurs élèves que les mathématiques forment l'esprit. Peut-être se sentent-ils autorisés de parler ainsi en

s'appuyant sur certaines recherches contemporaines, estime Lavoie qui poursuit : «À la suite des travaux de Piaget, on fit en effet une analogie entre la construction du savoir mathématique et les phases de formation de l'intelligence» (p. 14). À ce propos, il cite Gréco, qui résume bien la situation :

> Il y a [...] une compatibilité totale entre l'histoire même de la construction mathématique et l'histoire naturelle de l'intelligence, entre l'activité du mathématicien et celle du sujet; si énormes soient-elles, les différences ne sont que de niveau (Gréco, 1984, p.118, cité dans Lavoie, 1994, p. 14).

De telles affirmations ont nourri l'idée de construire l'enseignement des mathématiques en prenant comme canevas la genèse présumée de l'intelligence : mal interprété, le discours paraît établir un lien de cause à effet entre l'enseignement des mathématiques et la formation de l'intelligence, conclut Lavoie.

Les mathématiques sont-elles indispensables dans la vie de tous les jours ? On peut répondre par non en arguant que les tâches quotidiennes nécessitent peu de mathématiques, lesquelles peuvent être exécutées souvent à l'aide de calculatrices électroniques ou autres outils technologiques. Ou bien, on peut répondre par oui en pensant par exemple aux tâches quotidiennes ordinaires qui sont dictées par le devoir de la citoyenneté (voter intelligemment, être un consommateur vigilant, etc.). Dans ce cas, plus les discours s'adressant aux citoyens font appel à des mathématiques, plus ceux-ci doivent en connaître suffisamment pour pouvoir déchiffrer et saisir les tenants et les aboutissants de l'information qu'on leur offre. Étant donné les finalités que vise l'éducation de base pour tous, on peut sans conteste affirmer que les mathématiques sont indispensables pour les individus dans la société d'aujourd'hui.

Un troisième et dernier argument classique pour justifier l'enseignement des mathématiques à tous est que ces dernières sont utiles pour la préparation aux sciences et aux techniques. Les sceptiques ne contestent pas l'existence de domaines nécessitant une formation mathématique – la physique, l'informatique, l'économie, etc. – mais, avancent-ils, ces domaines sont relativement peu nombreux et concernent en définitive peu de gens, au demeurant des spécialistes ! (Lavoie, 1994). À cela on peut répondre

qu'une formation mathématique demeure indispensable pour l'apprentissage de certaines disciplines scolaires ou encore constitue un préalable pour accéder à des formations ultérieures. Car l'élève de l'école de base n'a pas encore une idée précise de la formation dans laquelle il s'engagera après sa scolarité obligatoire, qu'elle soit professionnelle, technique ou générale, ni par conséquent du volume et de la nature des mathématiques qui lui seront nécessaires. L'école de base doit donc permettre à chaque enfant de s'approprier les connaissances et les méthodes mathématiques de base qui lui permettront de s'engager dans la formation qui lui convient et de la compléter par la suite.

En définitive, une éducation en mathématiques contribue à l'éducation de base des enfants, futurs citoyens, en visant les quatre finalités suivantes :

- Préparer le citoyen en tant qu'utilisateur des mathématiques pour qu'il soit un acteur social et économique éclairé ;
- Préparer l'enfant à de futures carrières professionnelles ;
- Faciliter à l'élève l'apprentissage et la compréhension d'autres disciplines scolaires ;
- Contribuer au développement personnel et culturel de tous les élèves, en faisant apprécier les mathématiques en tant qu'activité intellectuelle riche, stimulante et attrayante et en tant que discipline scientifique ayant ses propres caractéristiques d'esthétique et de beauté.

La première finalité vise la satisfaction d'un besoin de la société, mais coïncide aussi avec des besoins personnels des individus. Il s'agit ici, comme l'avance Fey, de viser le développement chez l'élève d'habiletés mathématiques lui permettant de s'acquitter efficacement de son devoir de citoyen et d'appréhender son environnement social et technologique (Fey, cité dans Bell, 1979).

Le citoyen d'aujourd'hui se trouve très sollicité à la fois comme consommateur et comme participant au processus démocratique. Il se trouve alors souvent dans une situation où pour faire un choix pertinent, il doit analyser et comparer différents scénarios qui s'offrent à lui. Par exemple, les assurances, les banques, les compagnies

de téléphone, etc., pour arracher des clients à leurs concurrents, proposent différents plans; les clients ont besoin d'avoir une certaine base en mathématiques pour pouvoir faire un choix éclairé. D'autre part, le langage mathématique est utilisé fréquemment dans le discours politique. Pour justifier certaines décisions, les politiciens n'hésitent pas à utiliser des indicateurs socio-économiques (taux d'inflation, taux de croissance, démographie et planification familiale; hausse des salaires, coût de la vie; etc.), à faire appel à des statistiques où à se référer à des sondages. Une certaine base en mathématiques est indispensable au citoyen pour comprendre ce qu'on lui présente et pour éviter d'être exploité.

Le monde d'aujourd'hui est défini et expliqué en termes scientifiques, mathématiques et technologiques. Il n'y a qu'à consulter une page d'un journal ou d'une revue pour s'apercevoir combien les mathématiques sont utilisées dans la presse. Une certaine base de connaissances en mathématiques paraît ainsi nécessaire pour le bon exercice de la citoyenneté. Il serait, à notre avis, dangereux pour les individus eux-mêmes et pour le fonctionnement même de la société, que cette culture mathématique fondamentale soit accessible à une minorité d'individus seulement.

D'Ambrosio pour sa part affirme :

> Le principal objectif de l'enseignement des mathématiques ... est de développer la capacité des individus à identifier les mathématiques dans l'expérience intellectuelle et à distinguer le raisonnement et la méthode mathématique dans toutes les situations où ils sont présents ou pourraient s'appliquer. (Cité dans Brooms, 1981, pp. 59-60).

Selon la deuxième finalité, le curriculum de mathématiques doit permettre à chaque élève de maîtriser les connaissances mathématiques nécessaires pour accéder à la formation professionnelle ou pour s'engager dans des études plus poussées. Il faut bien souligner que l'éducation de base n'est pas une formation professionnalisante. C'est une formation générale au bout de laquelle l'élève accède à une formation professionnelle de son choix ou poursuit des études. Une question s'impose alors : quelle éducation de base en mathématiques peut permettre de préparer chaque enfant à

accéder à une formation professionnalisante, notamment une qui nécessite des connaissances mathématiques ?

La troisième finalité découle d'une contrainte du fonctionnement même de l'école : l'enseignement des mathématiques est essentiel à l'enseignement d'autres disciplines scolaires. De ce fait, il contribue aussi à la réalisation de la deuxième finalité, à l'instar d'autres disciplines enseignées à l'école de base. Comment faire pour que l'enseignement des mathématiques facilite aux élèves l'apprentissage d'autres disciplines scolaires ? Inversement, comment l'enseignement d'autres disciplines scolaires peut-il faciliter l'apprentissage des mathématiques ? Les rapports entre mathématiques et autres disciplines scolaires (ou qui pourraient le devenir) sont loin d'être faciles à saisir. Dans la littérature, un grand nombre de termes est utilisé pour désigner ces rapports. Ainsi, en français, on parle d'interdisciplinarité, de multidisciplinarité, de transdiciplinarité et d'intégration des matières, tandis qu'en anglais, on utilise les mots : integration, connections, cooperation, coordination, correlated, cross-disciplinary, fused, interactions, interdependent, linked, unified (Berlin et White, 1995). À ce propos, Charnay se demande:

> Comment certaines notions mathématiques sont-elles utilisées dans d'autres disciplines, avec quels aménagements et, à l'inverse, comment des problèmes posés en physique, par exemple, peuvent-ils être au point de départ d'un travail sur de nouvelles connaissances ? Faut-il avoir travaillé préalablement sur les vecteurs pour pouvoir étudier la notion de force en physique ou bien, au contraire, les questions suscitées par la représentation des forces en physique peuvent-elles être l'occasion d'un travail simultané en mathématique et en physique ? La volonté de développer, à l'école une véritable culture scientifique et mathématique trouverait là une occasion de s'affirmer concrètement. (Charnay, 1996, p. 15)

Les disciplines enseignées dans l'éducation de base devraient s'articuler de façon à contribuer harmonieusement au développement intégré de l'enfant dans l'éducation de base. Le *Yearbook* édité par le NCTM[55] en 1995 présente les idées de différents auteurs à ce sujet.

---

[55] House, P. A. & Coxford, A. F. (Eds.) (1995) *Connecting mathematics across the curriculum.* 1995 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mahematics.

Concernant la quatrième finalité, il est généralement reconnu que les mathématiques contribuent au développement personnel et culturel de tous les élèves. Comme l'explique Freudenthal:

> Les mathématiques sont une activité humaine à la fois naturelle et sociale, de même que la parole, le dessin et l'écriture. Elles figurent parmi les premières activités cognitives que nous connaissions et elles ont été la première discipline à être enseignée, mais elles ont évolué et elles se sont transformées sous l'influence du changement social, tout comme leur philosophie et la manière de les enseigner (Freudenthal, 1979, pp. 342-343).

Si les mathématiques sont un héritage de l'humanité et font partie de la culture universelle, elles sont aussi une discipline scientifique ayant ses propres caractéristiques d'esthétique. Elles continuent à fasciner un grand nombre de personnes, pour qui elles sont la source de satisfactions personnelles profondes et l'occasion d'activités riches et stimulantes. Cette dimension n'est pas à négliger dans l'éducation mathématique de base.

4.4 L'ALGÈBRE ET LA PENSÉE ALGÉBRIQUE EN TANT QUE COMPOSANTES INCONTOURNABLES DE L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE DE BASE

Pendant fort longtemps, l'éducation mathématique de base se composait essentiellement de l'arithmétique, des mesures et de rudiments de la géométrie enseignés au primaire. Dans plusieurs pays, suite au prolongement de la scolarité obligatoire, d'autres sujets enseignés autrefois à l'école secondaire sont devenus récemment des composantes de l'éducation mathématique de base. C'est le cas, précisément, de l'algèbre, et aussi de chapitres de la géométrie, comme la géométrie déductive et la géométrie analytique. Plus récemment encore, soit depuis une vingtaine d'années, on discute l'opportunité d'inclure dans l'éducation mathématique de base, une initiation à la géométrie à trois dimensions et à l'étude mathématique du phénomène du hasard.

Revenons au cas plus spécifique de l'algèbre. Comme nous venons de le souligner, elle est devenue généralement une composante des mathématiques enseignées dans l'éducation de base et un préalable indispensable pour l'étude de thèmes mathématiques importants par la suite comme les fonctions, la géométrie analytique, le calcul vectoriel et matriciel.

Insistant sur l'importance de l'algèbre dans les mathématiques de l'école, certains auteurs vont jusqu'à affirmer que l'algèbre ne doit pas être vue comme une matière scolaire isolée, mais plutôt comme une manière de traiter les autres matières mathématiques enseignées à l'école.

> I also need to remark that I do not see algebra as an identifiable course, separate form other branches of mathematics, but as appearing throughout the mathematics course, its symbolism, concepts, and methods being used wherever appropriate in the other fields – in expressing arithmetical generalization, solving geometrical problems, denoting unknown elements, solving equations and establishing relations in trigonometry, as formulas for use in statistics and mensurations, and so on. This is, I believe, correct from both epistemological and pedagogical standpoints. (Bell, 1996, p. 167)

Le point de vue de Kaput est encore plus tranchant :

> Algebra as a course is simply wrong: As an expressive language it needs to be used for many years across, many situations, as a means to extend and generalize quantitative reasoning and to serve the development of multiple strands of mathematics. As an important set of structures, it should grow out of and help contextualize arithmetic, and later (in high school) should grow out of work with polynomials and other objects in a spirit of conjecture and justifications, setting the stage for further learning at the college level. The intrinsic embeddedness of algebraic reasoning is violated by treating it as a course. (Kaput, 199X, p. Xx)

Par ailleurs, l'algèbre est aussi un préalable indispensable à l'apprentissage d'autres disciplines scientifiques de l'école secondaire, comme la physique et les sciences naturelles. Usiskin va encore plus loin; il explique à des élèves la nécessité d'apprendre l'algèbre comme suit :

> Without a knowledge of algebra,
> • you are kept from doing many jobs or even entering programs that will get you a job;

> • you lose control over parts of your life and must rely on others to do things for you;
> • you are more likely to make unwise decisions, financial and otherwise; and
> • you will not be able to understand many ideas discussed in chemistry, physics, the earth sciences, economics, business, psychology, and many others areas. (Usiskin, 1995, p. 31)

L'algèbre a toujours posé un problème particulier dans la problématique de l'enseignement des mathématiques pour tous. En effet, si l'enseignement de l'arithmétique pour tous a depuis longtemps fait l'unanimité, même auprès du grand public, il n'a pas été de même pour celui de l'algèbre, laquelle reste perçue, à cause dit-on de son langage formel, comme étant hautement abstraite et donc hors de portée de la majorité. Dans le cas de la géométrie, on a fini par se mettre d'accord sur un ensemble minimum de sujets à enseigner à tous, à savoir : périmètres, aires, volumes; nom et propriétés de quelques figures géométriques usuelles; etc. Dans le cas de l'algèbre, le problème reste entièrement posé. Il découle en partie du fait que l'on a tenté d'enseigner à tous, selon les mêmes méthodes, ce qu'on enseignait en algèbre à une minorité. Cela a occasionné le genre de problèmes cités dans le chapitre 1, et c'est pour cette raison qu'il existe autant de travaux de recherche et de développement à propos de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre dans l'éducation de base.

Retraçant l'évolution de l'enseignement de l'arithmétique à l'école – d'abord il a été limité à une minorité, ensuite il a été étendu à une majorité d'élèves; maintenant il rejoint tout le monde — Usiskin avance que l'enseignement de l'algèbre va probablement suivre une évolution semblable dans l'avenir. À cet effet, il avance trois types d'arguments :

> Following the history of arithmetic, the first component in the question of algebra of all would have to be a perceived need by society for that algebra. I believe the general view of the nonmathematical public is that algebra is certainly required for future engineers or scientists or for work with computers, statistics, economics, or any field that seems dependent on numbers; or for any field that uses science, such as medicine. The general public might also realize that the building trades, such as carpentry or plumbing, use algebraic formulas. It may well be that this is enough to ensure that algebra should be and will be taught to all.

> A second argument for major attention to algebra and higher mathematics for the entire populace has appeared recently in the policy arena of the advanced industrialized countries. It goes somewhat as follows: The economic well-being of a country must be based on having jobs for its people. The new jobs in the 21st century will be based on achievements in sectors such as biotechnology, telecommunications, computers and software, robotics and machines tools, and microelectronics. Better products in these areas require statistical quality control. To have statistical quality control, workers need to understand it, which requires that they have studied statistics and operations research, and for these a person needs a considerable amount of mathematics. Thus, whereas, in the past, knowledge of this mathematics has been seen as an *individual* need, now the knowledge is seen as a *societal* need. That makes it even more likely that algebra will be for all students.
> For a couple of hundred years there has existed the mathematical language and tools that make universal competence in algebra a reasonable expectation. Worldwide we use the Latin alphabet in elementary algebra; we use coordinate graphs to picture functions. The big change —within the past 7 years — is that there now exists technology that makes the graphing of functions and data, and even curve-fitting and data analysis accessible to all, with the ability to be taken anywhere one has a pocket, and user-friendly enough so that one does not need to know huge amounts of mathematics in order to use the technology. (...) I believe that algebra will become a subject for all but not the same algebra that we now teach, and with it will come many of the concepts of elementary analysis and calculus. (Usiskin, 1994, pp. 320 -321)

Dans cette citation, notons en particulier qu'Usiskin insiste, lui aussi, sur le fait que l'algèbre pour tous sera très différente de l'algèbre actuellement enseignée.

Comme on le verra plus tard, on a maintenant tendance à avoir une vision plus large de l'algèbre et, dans l'éducation de base, à mettre l'accent sur le développement de la pensée algébrique, notamment d'habiletés intellectuelles très importantes comme penser analytiquement, généraliser, abstraire, etc. Puisque ce développement se fait sur une longue période, *il y a donc lieu de commencer assez tôt dans le cursus scolaire.*

En conclusion, l'algèbre et la pensée algébrique sont de toute évidence des composantes incontournables dans l'éducation mathématique de base, même s'il n'est pas facile de les rendre accessibles à tous les élèves.

FORMULATION DES QUESTIONS DE RECHERCHE

Chapitre 5

Objectif, questions et méthode de recherche

5.1 RETOUR SUR L'OBJECTIF VISÉ

Rappelons que notre objectif de recherche est : *Mener une étude approfondie visant à reconceptualiser le curriculum de l'algèbre pour tous dans l'éducation de base.* Dans la deuxième étape de cette thèse, nous préciserons cet objectif au moyen de questions de recherche. Mais auparavant, nous allons brièvement clarifier les notions d'*approche didactique de l'algèbre* et de *curriculum d'algèbre pour tous.*

5.2 LA NOTION D'APPROCHE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE

Nous avons vu au chapitre 3 que l'algèbre possède de multiples aspects. Un de ces aspects ou une certaine combinaison d'entre eux peut être à la base d'options curriculaires de l'enseignement de l'algèbre à l'école. Ainsi, une transposition didactique[56] de l'algèbre peut être élaborée en privilégiant un aspect de l'algèbre plutôt qu'un autre, ce qui aura des conséquences didactiques importantes concernant les orientations et le contenu du curriculum en question. Ainsi, si l'accent est mis sur l'algèbre en tant qu'étude de structures algébriques, nécessairement il en résultera une certaine structuration du contenu à enseigner et le curriculum véhiculera une certaine conception de l'algèbre chez les enseignants et les élèves. Ces conséquences didactiques seraient différentes de celles qui découlent de l'option privilégiant l'aspect modélisation de l'algèbre.

Nous désignons alors par *approche didactique* de l'algèbre une telle option curriculaire. Dans leur livre sur les approches de l'algèbre, Bednarz, Kieran et Lee (1996) parlent elles aussi d'options curriculaires pour définir ce qu'est une approche de l'algèbre. Se

---

[56] Due initialement à Verret (1975), reprise et approfondie par la suite par Chevallard (1984), la notion de *transposition didactique* caractérise le décalage entre les *savoirs de référence* (savoirs savant et culturel de la société), le *savoir à enseigner* et le *savoir enseigné* (Tavignot, 1993). Au sens strict, le terme de transposition didactique désigne "le passage d'un contenu de savoir à une version didactique de cet objet de savoir" (Chevallard, 1985).

référant à différentes manières d'introduire l'algèbre élémentaire ayant caractérisé certains curriculums anciens ou qui ont été récemment proposés par certains éducateurs, elles affirment, en effet:

> Thus, different options for introducing algebra have appeared over time, options that are again coming to the fore in new programs throughout the international community. These curricular options determine to a large extent the algebraic conceptions the students develop, (...), the poor strategic decision they make, and, in a more general way, the relationship they continue to maintain with algebra several years after having been introduced to it. (Bednarz, Kieran et Lee; 1996; p. 3)

5.3 LA NOTION DE CURRICULUM D'ALGÈBRE POUR TOUS

Le terme *curriculum* est utilisé dans une variété de significations. Il peut désigner une liste de contenus spécifiques d'un programme d'étude, ou à l'autre extrême, il peut désigner n'importe quelle idée ou habileté que les élèves acquièrent effectivement en classe (Ahlegren et Garfield, 1991). Ces auteurs distinguent cinq niveaux de curriculum différents:

> **Le curriculum souhaité**: C'est le plan écrit pour le système scolaire et qui spécifie ce qui doit être enseigné, en quelle séquence et à quel âge. Il peut aussi inclure des suggestions de méthodes d'enseignement et de moyens d'évaluation des acquis des élèves. Le curriculum planifié peut être évalué essentiellement à partir de la lecture de documents.
> **Le curriculum enseigné**: C'est ce que les enseignants réalisent effectivement en classe — quel cours ils donnent, quelles questions ils posent et quels problèmes ils assignent. Ce curriculum peut être évalué par les rapports d'enseignants, ou, mieux, par des observations de classes.
> **Le curriculum appris**: Ce sont les idées et les habiletés que les élèvent ont effectivement apprises à partir de leurs expériences en classe et de leurs travaux à la maison. Ce curriculum peut être évalué en testant les élèves à la fin d'un cours ou de sections de cours.
> **Le curriculum retenu**: Ce sont les idées et les habiletés dont les élèvent se souviennent encore après la fin de leur instruction. Par exemple, combien ils vont se rappeler d'un cours passé alors qu'ils en commencent un autre où les connaissances précédentes sont supposées acquises.
> **Le curriculum appliqué**: Ce sont les idées et les habiletés que les élèvent mobilisent dans un cours ultérieur au cours où elles ont été enseignées. L'utilisation de ces connaissances peut être dans leur vie personnelle, dans leur travail ou au cours d'une scolarisation ultérieure. (Ahlegren et Garfield, 1991, pp. 113-114; traduction libre).

Dans notre travail, nous considérons uniquement le *curriculum souhaité*, appelé aussi quelquefois *curriculum officiel*. Sauf mention du contraire, le terme curriculum signifiera donc toujours le curriculum souhaité par la suite.

Après avoir précisé ce que l'on entend par curriculum, intéressons-nous maintenant aux éléments qui composent un curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. À cet effet, nous adaptons un modèle général de curriculum proposé par Eraut[57].

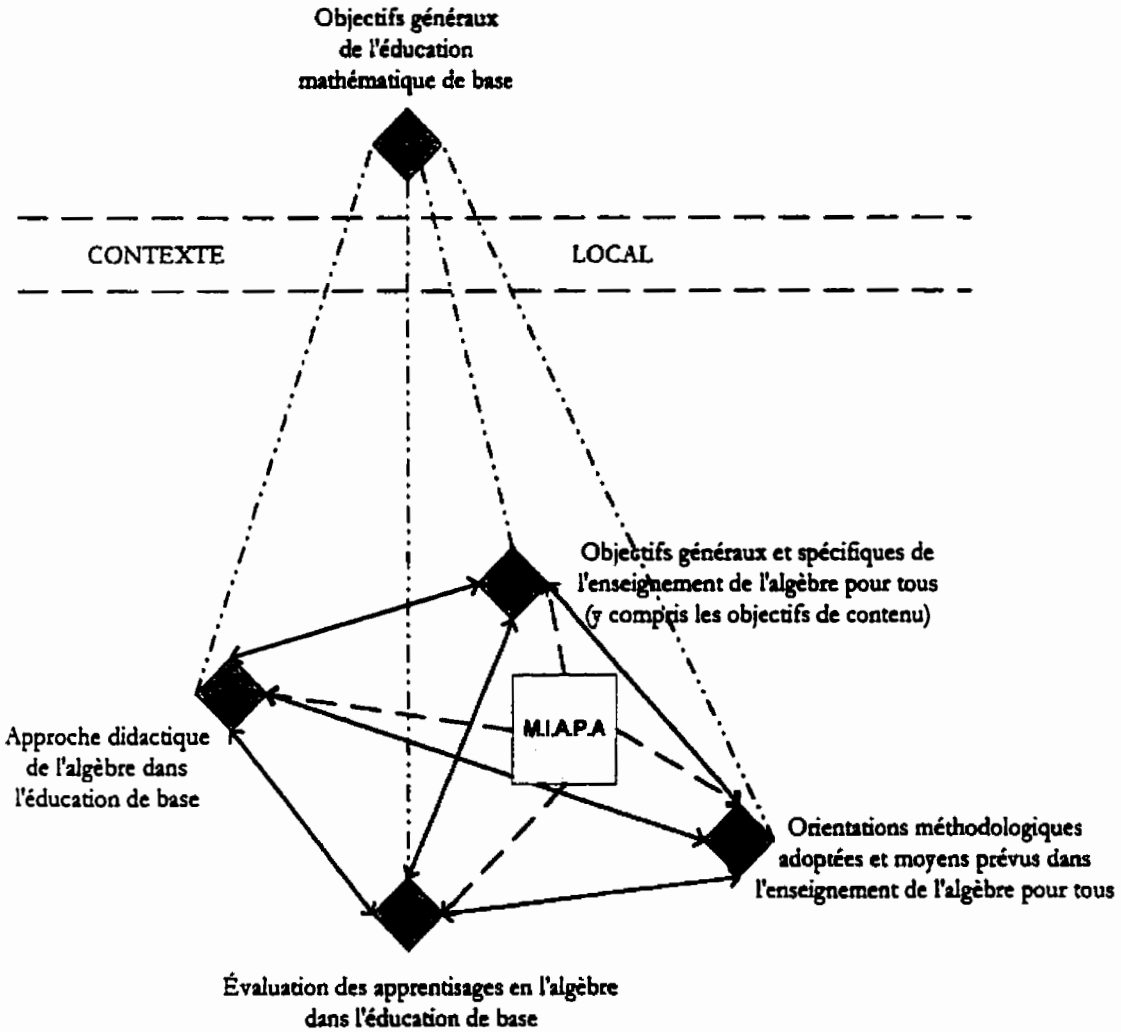


Figure 5.1 : Modèle du curriculum d'algèbre pour tous adapté du modèle d'Eraut (1990)

[57] Nous avons choisi ce modèle parce qu'il permet de saisir de manière simple et claire les composantes d'un curriculum officiel ainsi que les liens entre elles.

Si nous faisons provisoirement abstraction du curriculum de mathématiques, c'est d'abord pour des raisons de commodité de la présentation de notre travail; mais aussi, nous pensons que compte tenu du fait que nous sommes dans un domaine qui comporte beaucoup de difficultés, où le poids d'une longue tradition d'enseignement de l'algèbre est fort pesant, pour sortir des sentiers battus, il est utile de commencer d'abord par réfléchir à un curriculum souhaitable d'algèbre pour tous et par la suite de se demander de quelles façon il faut l'intégrer dans le curriculum de mathématiques pour tous. Dans ce sens, on peut voir le modèle du curriculum d'algèbre pour tous comme, en fait, la partie spécifique à l'algèbre du modèle du curriculum de mathématiques pour tous.

Le modèle original d'Eraut utilise une représentation pyramidale, où, brièvement, le sommet représente les objectifs généraux, et les quatre éléments de la base représentent respectivement, la matière à enseigner, l'évaluation, les objectifs et finalement les orientations et moyens méthodologiques. L'élément représentant notre modèle théorique M.I.A.P.A ne figure pas dans le modèle original d'Eraut; nous expliquons un peu plus loin pourquoi nous l'avons ajouté.

Au sommet de la pyramide on trouve les objectifs généraux de l'éducation mathématique de base. Ces objectifs ont été formulés dans la section 4.3, ils sont normalement subordonnés aux objectifs de l'éducation de base pour tous et aussi à une certaine philosophie concernant les mathématiques, les mathématiques enseignées, l'enseignement, l'apprentissage et l'évaluation. Ceci est schématisé par des traits en pointillé reliant le sommet aux quatre autres éléments formant la base de la pyramide. De plus, ces objectifs doivent aussi tenir compte du contexte local dans lequel le curriculum est réalisé, comme l'indique la bande horizontale CONTEXTE LOCAL.

Les quatre éléments de base de la pyramide sont reliés à l'élément représentant notre modèle M.I.A.P.A. Nous voulons signifier par cette représentation que l'approche didactique de l'algèbre, les objectifs généraux et spécifiques de l'enseignement de

l'algèbre, les moyens et orientations pédagogiques ou encore le mode d'évaluation privilégié dans le curriculum, reposent sur certains choix curriculaires faits par rapport au modèle M.I.A.P.A. C'est de cette manière que l'approche didactique de l'algèbre sera en cohérence avec le modèle théorique, lequel constitue, rappelons-le, un cadre théorique de référence pour la formation du contenu algébrique à enseigner. Cet élément correspond, sans le traduire exactement dans le cas de l'algèbre, à l'élément *matière à enseigner* du modèle original. Les considérations plus spécifiques concernant le contenu à enseigner sont décrites dans l'élément *Objectifs généraux et spécifiques de l'enseignement de l'algèbre pour tous* de notre modèle.

Le trait en pointillé liant l'élément *Approche didactique de l'algèbre dans l'éducation de base* avec l'élément au sommet de la pyramide, signifie qu'une telle approche doit être choisie en harmonie et en cohérence avec les objectifs généraux de l'éducation mathématique de base.

Par ailleurs, le choix d'une approche didactique de l'algèbre ne permet pas encore d'expliciter un contenu algébrique spécifique à enseigner ni les objectifs d'apprentissage à viser, ni encore les orientations méthodologiques à suivre ou la manière d'envisager l'évaluation. Ces objectifs et ces orientations, ainsi que les considérations en rapport avec l'évaluation, sont représentés respectivement par les trois autres éléments du quadrilatère de base de la pyramide: *Objectifs généraux et spécifiques de l'enseignement de l'algèbre pour tous*, *Orientations méthodologiques adoptées et moyens prévus dans l'enseignement de l'algèbre pour tous* et, *Évaluation des apprentissages de l'algèbre à réaliser dans l'éducation de base.*

5.4 QUESTIONS ET MÉTHODE DE RECHERCHE

5.4.1 Première question de recherche et moyens retenus pour y répondre

Reconceptualiser le curriculum d'algèbre dans l'école de base nécessite en premier lieu de définir une approche didactique de l'algèbre, produit d'une transposition didactique, à partir d'un cadre théorique de référence de l'algèbre et de la pensée algébrique. Ce cadre théorique peut être explicite ou non. Dans notre cas, ce cadre théorique de référence est le modèle M.I.A.P.A. ainsi que les explications et les précisions qui l'accompagnent. Il est explicite et les approches didactiques de l'algèbre et de la pensée algébrique que nous pouvons imaginer sont alors des prises de position par rapport à ce modèle théorique. Notre première question de recherche s'énonce alors ainsi.

- *Quelle approche didactique utiliser dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base ?*

Pour répondre à cette question de recherche, nous procédons en deux temps. Dans un premier nous tentons de transposer des approches didactiques possibles de notre modèle M.I.A.P.A., sans nous préoccuper de leur pertinence ni de leur faisabilité. Dans un deuxième temps, nous procédons à une analyse de diverses approches didactiques de l'algèbre, tant traditionnelles que nouvellement proposées dans la communauté didactique. Nous ferons après une synthèse et nous présenterons notre réponse à notre première question de recherche.

5.4.2 Deuxième question de recherche et moyens retenus pour y répondre

Le choix d'une approche didactique ne permet pas encore de définir le curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Il reste encore des choix à faire concernant chacun des autres pôles formant le modèle du curriculum d'algèbre pour tous (fig. 5.1). Il est tout à fait clair que définir un tel curriculum en détail est une tâche qui dépasse

largement les limites de cette thèse. En revanche, nous pouvons proposer un certain nombre de principes qu'un curriculum d'algèbre pour tous véritablement adapté à l'éducation de base devrait satisfaire. De tels principes devraient être cohérents avec notre cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique et notamment avec le modèle M.I.A.P.A.

Dans ce sens, notre deuxième question de recherche s'énonce ainsi :

- *Sur quels principes peut-on se baser pour évaluer ou construire un curriculum d'algèbre pour tous véritablement adapté à l'éducation de base* ?

Pour répondre à cette question, nous allons nous baser sur notre cadre conceptuel ainsi que sur une analyse critique de travaux en didactique de l'algèbre. Chacun de ces principes sera justifié par une analyse personnelle argumentée, le plus souvent et dans la mesure du possible, par les points de vues d'autres éducateurs.

Les principes que nous cherchons à formuler ne peuvent pas être directement utilisés pour construire ou analyser un curriculum d'algèbre pour tous. Chacun d'eux, en effet, devrait être accompagné d'un indicateur qui le rend plus opérationnel. La nature de tels indicateurs sera précisée dans le chapitre 7.

ÉTUDE ET RÉPONSES AUX QUESTIONS DE RECHERCHE

Chapitre 6

Les approches didactiques de l'algèbre dans l'éducation de base

6.1 INTRODUCTION

En vue de répondre à notre première question de recherche (Quelle approche didactique utiliser dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base ?), dans ce chapitre, nous allons présenter quatre approches didactiques possibles de l'algèbre qu'on peut imaginer à partir de notre M.I.A.P.A : l'approche «langage», l'approche «structures», l'approche «modélisation» et l'approche «fonction». (La notion d'approche didactique a déjà été précisée dans 5.2.) Par la suite, nous analyserons quelques approches didactiques traditionnelles ainsi que d'autres récemment proposées dans la communauté didactique pour enseigner l'algèbre à l'école. Dans la dernière section du chapitre, nous préciserons l'approche didactique que nous retenons pour l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base.

6.2 APPROCHES DIDACTIQUES POSSIBLES DE L'ALGÈBRE DANS L'ÉDUCATION DE BASE

Différentes approches didactiques théoriques de l'algèbre peuvent être transposées de notre modèle M.I.A.P.A., les unes mettant l'accent sur un aspect explicitement cité dans le modèle et d'autres sur des combinaisons de deux aspects ou plus mentionnés dans M.I.A.P.A.

Nous nous intéressons ici à des approches *théoriques*, sans nous occuper de leur pertinence et de la possibilité des les implanter. Ce n'est que dans le chapitre 7 que nous tenterons de préciser les caractéristiques d'un curriculum moderne d'algèbre pour l'éducation de base. Les approches didactiques que nous allons présenter ici laissent donc ouvert un ensemble de choix curriculaires nécessaires pour les concrétiser en des curriculums effectifs d'algèbre. En pratique, il existe différentes manières de concrétiser chaque approche didactique théorique de l'algèbre.

6.2.1 L'approche «langage»

Dans les activités de modélisation algébrique de situations réelles ou mathématiques, de résolution de problèmes ou de recherche de «généralisations», le travail consiste, en fin de compte, à exprimer symboliquement des relations – où interviennent des opérations – et à les transformer en des formes qui révèlent des aspects nouveaux de ces relations. Pour cela, l'algébriste conduit son activité dans un espace de calcul algébrique, disposant ainsi d'un moyen pour représenter des variables, exprimer des relations et les transformer selon des règles syntaxiques. Dans ce sens, l'algèbre possède un langage, que nous appellerons *langage algébrique*. Ce langage a deux fonctions essentielles : une fonction *représentative et descriptive* propre à tout langage et une fonction *transformante et générative* de la connaissance, plus spécifique à l'algèbre. Ces deux fonctions du langage algébrique sont expliquées dans notre cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique, notamment dans les sections 3.3.1.2, 3.3.2, 3.3.3, 3.4.2 et 3.4.3.

L'approche didactique «langage» fait référence en premier lieu à la composante *manipulation d'expressions algébriques selon des règles prédéfinies* de la face algèbre de M.I.A.P.A. en ce qui concerne la fonction transformante et générative du langage algébrique. Elle fait référence également aux deux autres composantes de la face algèbre du M.I.A.P.A. relativement à la fonction représentative et descriptive du langage algébrique. Elle se trouve ainsi théoriquement fondée.

D'un point de vue didactique, elle tire son fondement aussi du fait que tout apprentissage de l'algèbre doit aborder assez vite celui du langage algébrique. En effet, sans une certaine maîtrise conceptuelle et technique de ce dernier, l'algèbre ne peut pas être véritablement utilisée, particulièrement pour résoudre des problèmes. On peut, cependant, se demander à quel degré cette maîtrise est nécessaire et quel genre de performance est souhaitable en calcul algébrique.

Dans cette approche, une grande importance est donnée à l'apprentissage du langage algébrique dans ses dimensions représentative et descriptive, d'une part, et transformante et générative de la connaissance, d'autre part. Expliquons plus en détails deux objectifs de l'apprentissage de l'algèbre qui en résultent.

Un premier objectif consiste à apprendre la syntaxe du langage algébrique, c'est-à-dire apprendre à lire et à former des écritures algébriques (les éléments de l'espace de calcul algébrique dans lequel est conduite l'activité) de manière syntaxiquement valide. Il consiste aussi à apprendre la sémantique du langage algébrique, c'est-à-dire à apprendre à exprimer algébriquement des relations et à interpréter les écritures algébriques obtenues dans divers types d'activités (résolution de problèmes, modélisation, recherche d'une régularité, etc.) et de contextes. C'est la nature de l'activité et le contexte de la situation à l'étude qui déterminent la manière de représenter et d'interpréter une écriture algébrique. Par exemple, comme l'expliquent Sfard et Linchevsky dans la citation qui suit, une expression algébrique peut avoir différentes significations, tout dépendant de la situation en jeu et de la nature de l'activité.

> When you look at an algebraic expression such as, say, $3(x + 5) + 1$, what do you see? It depends. In certain situations you will probably say that this is a concise description of a computational process. $3(x + 5) + 1$ will be seen as a sequence of instructions: Add 5 to the number at hand, multiply the result by 3 an add 1. In another setting you may feel differently: $3(x + 5) + 1$ represents a certain number. It is the product of a computation rather than the computation itself. Even if this product cannot be specified at the moment due to the fact that the component number x is unknown, it is still a number and the whole expression should be expected to behave like one. If the context changes, $3(x + 5) + 1$ may become yet another thing: a function – a mapping which translates every number x into another. This time, the formula does not represent any fixed (even unknown) value. Rather, it reflects a change. The things look still more complicated when a letter appears instead of one of the numerical coefficients, like in $a(x + 5) + 1$. The resulting expression may now be treated as an entire family of functions from R to R. Alternatively, one may claim that what hides behind the symbols is a function of two variables, from R^2 to R. There is, of course, a much simpler way of looking at $3(x + 5) + 1$: it may be taken at its face value, as a mere string of symbols, which represents nothing. It is an algebraic object in itself. Although semantically empty, the expression may still be manipulated and combined with other expressions of the same type, according to certain

> well-defined rules (Sfard & Linchevsky, 1994, p. 191, In Kieran, 1994, pp. 158-159).

Cet exemple montre, ajoutent ces auteures, qu'une expression algébrique peut être interprétée, selon les cas, comme un processus de calcul, un nombre fixé mais inconnu, une fonction, une famille de fonctions ou encore une chaîne de symboles. Savoir recourir à différentes interprétations d'une expression algébrique devrait aussi faire partie de l'apprentissage du langage algébrique. En particulier, l'élève devrait être capable de distinguer et d'exploiter différents statuts de la variable : un nombre connu, une inconnue, une variable qui varie, un paramètre, une marque sur le papier, etc. Dans cette dimension représentative et descriptive du langage algébrique, le but de l'activité pourrait être, par exemple, la détermination de la valeur d'une inconnue, la recherche d'une formule ou d'une régularité numérique.

Un second objectif de l'apprentissage de l'algèbre, consiste, de manière succincte, à apprendre à manipuler le calcul algébrique de *manières formellement valides et fonctionnellement pertinentes*, comme nous l'avons déjà expliqué dans les sections 3.3.3 et 3.4.3. Comme pour tout autre langage, en effet, il ne suffit pas de savoir former des mots et des phrases qui soient syntaxiquement valides. Il est nécessaire que ces mots et ces phrases aient un sens, expriment une certaine connaissance et visent un certain but. Ainsi, s'il est utile d'avoir des connaissances de base dans la mécanique du calcul algébrique, il est indispensable de savoir utiliser ce calcul dans divers types d'activités et de contextes.

La maîtrise du langage algébrique doit alors être fonctionnelle, et les domaines de fonctionnalité du langage algébriques sont divers. Les plus classiques sont, entre autres, la résolution de problèmes (d'équations, en particulier), la recherche de formules, la modélisation, la recherche de régularités, la généralisation de règles ou de procédures. Il est important que les activités algébriques couvrent un large éventail de domaines mettant en jeu différents statuts de la variable. Comme nous l'avons souligné en 3.3.2, l'activité de modélisation nécessite des connaissances propres au système modélisé, elle implique donc l'acquisition d'un nombre croissant de champs sémantiques (Lee, 1995).

Le choix de ces champs sémantiques et des domaines de fonctionnalité du langage algébrique est dicté aussi par d'autres aspects du curriculum, comme la nature des buts poursuivis, les outils d'aide à l'apprentissage utilisés (par exemple les moyens technologiques), etc. Nous reviendrons sur ce point dans le prochain chapitre.

Pour atteindre les objectifs de l'apprentissage du langage algébrique, il est nécessaire que les élèves développent certains aspects de la pensée algébrique tels que décrire algébriquement les relations entre les variables pertinentes dans divers types de situations et de contextes, interpréter des écritures algébriques (formules, équations, inéquations, etc.) dans différents contextes, manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies, etc. Ces habiletés intellectuelles ont été expliquées dans 3.4.

Faisons remarquer que le développement de ces habiletés intellectuelles nécessite au préalable celui de l'habileté à penser analytiquement. Comme nous l'avons déjà souligné dans la présentation de l'algèbre symbolique de Viète (2.5.5), la tendance à penser analytiquement et à généraliser (des règles, des procédures de résolution de problème, etc.) renforce la tendance à symboliser. En effet, la tendance à opérer sur quelque chose d'inconnu pousse à commencer par le nommer, le représenter par un symbole pour pouvoir opérer sur ce symbole comme s'il était une quantité connue. De même, la tendance à généraliser une règle, et à communiquer ou à justifier mathématiquement cette généralisation, pousse à utiliser des symboles qui représentent une large classe d'objets mathématiques.

Par ailleurs, nous avons expliqué en 3.3.3 la nécessité de disposer d'espaces de calcul algébrique. L'apprentissage du langage algébrique doit s'accompagner de la construction d'espaces de calcul algébrique. Ici se pose un problème didactique important. Car quand l'algèbre est introduite suffisamment tôt dans le cursus scolaire, l'élève ne dispose pas encore entièrement de tels espaces de calcul. Sur quoi alors fonder et employer le calcul algébrique ?

Une première solution, traditionnelle, consiste à utiliser le domaine des nombres à la fois comme le mobile et le fondement de l'étude du langage algébrique. Sauf dans de rares exceptions, en effet, les curriculums traditionnels d'algèbre fondent le langage algébrique sur le langage arithmétique tout en l'exploitant principalement pour étudier des questions portant sur les nombres. Dès les débuts de l'algèbre, on se heurte alors au fait qu'il faut disposer des nombres entiers négatifs, au moins, pour pouvoir effectuer un calcul algébrique aisé. Dans beaucoup de manuels anciens, l'enseignement de l'algèbre commence, en effet, par l'introduction de cette catégorie de nombres, et l'extension des opérations arithmétiques et de leurs propriétés. C'est le cas par exemple du curriculum d'algèbre en vigueur au Maroc. Mais cette introduction, essentielle pour l'exposé du calcul algébrique, pose à son tour un problème didactique intéressant. Car, comme le souligne élégamment Chevallard, «les nombre négatifs s'introduisent dans la pratique mathématique non pas à l'instar des entiers naturels, c'est-à-dire comme des nombres servant à compter soit à mesurer des ensembles finis, mais comme moyen de calcul, comme un artifice de calcul» (Chevallard, 1989b). D'où le paradoxe suivant : les nombres entiers négatifs sont utilisés dans les curriculums traditionnels comme moyen pour exposer un calcul algébrique dont ils tirent leur justification !

En fait, tout se passe comme si le système des nombres entiers naturels, dont les caractéristiques opératoires fournissent les règles du calcul algébrique n'était pas suffisant pour fournir assez de nombres sur lesquels le calcul algébrique pourra opérer de manière satisfaisante. Par exemple, dans l'ensemble des entiers naturels, l'expression $a - b$ n'est pas toujours valide, ce qui contraint le déploiement du calcul algébrique. En effet, si par exemple a, b et c désignent trois entiers naturels non nuls tels que $a < b$ et $b - a < c$, l'expression $c + a - b$, valide dans N, doit être conceptualisée uniquement comme le processus de calcul consistant à effectuer d'abord la somme $c + a$ et ensuite à retrancher le nombre b du résultat trouvé. C'est la nécessité de l'extension du calcul algébrique qui motive l'introduction des nombres entiers négatifs et non l'inverse. De manière générale, le calcul algébrique défini à partir des règles de calcul des opérations arithmétiques usuelles va nécessiter l'extension de son domaine d'emploi, jusqu'à sa

clôture algébrique, soit l'ensemble des nombres algébriques.[58] Autrement dit, l'extension se poursuivra jusqu'à ce que l'on obtienne un espace de calcul algébrique où ce dernier pourra se déployer de manière optimale.

Une deuxième solution théorique au problème du développement du calcul algébrique est sa présentation de manière formelle, c'est-à-dire la présentation du calcul littéral. Mais dans ce cas, pour appliquer le calcul algébrique on doit nécessairement l'appliquer sur des nombres et donc disposer des systèmes de nombres. Dans une telle approche, on procède plutôt d'une manière déductive : les règles du calcul algébrique sont déduites d'un certain nombre de règles préalables; les exemples numériques ne sont utilisés que pour illustrer le calcul algébrique et l'arithmétique perd sa valeur heuristique dans l'introduction de l'algèbre.

Une troisième solution théorique au problème de l'introduction du calcul algébrique consiste à présenter d'abord les structures algébriques et à déduire ensuite les règles du calcul algébrique des axiomes et des théorèmes qui en découlent. La différence avec les deux approches précédentes est que dans le calcul algébrique, les lettres ne représentent pas un nombre "déguisé" mais un élément d'un système algébrique abstrait. Il s'agit dans ce cas de l'approche «structures» que nous allons présenter dans la prochaine section, plutôt que de l'approche «langage» proprement dite.

Enfin, une quatrième et dernière solution contourne le problème de la justification des règles du calcul algébrique en utilisant un outil technologique, un système symbolique mathématique, par exemple, comme *Maple* ou un autre plus adapté à l'algèbre élémentaire. Mais dans ce cas aussi, on prend généralement appui sur les propriétés des opérations arithmétiques sur les nombres, qui font partie de la théorie de l'outil.

---

[58] Soit l'ensemble des nombres complexes qui sont racines de polynômes dont les coefficients sont des nombres entiers relatifs.

Finalement, une caractéristique de l'approche didactique «langage» est que l'apprentissage du langage algébrique est le principal objectif de l'enseignement de l'algèbre. Plus précisément, il s'agit d'apprendre à :

- accepter de représenter algébriquement des variables et des relations entre variables et d'opérer algébriquement sur ces représentations; en particulier, apprendre à penser de manière analytique;
- lire et former des écritures algébriques de manière syntaxiquement valide;
- exprimer algébriquement des relations et interpréter des écritures algébriques dans divers types d'activités et de contextes (tout particulièrement, cerner les différents statuts de la variable : une inconnue, une variable qui varie, un paramètre, une marque sur le papier, etc.);
- manipuler le calcul algébrique de manière formellement valide et fonctionnellement pertinente (dans la résolution de problèmes, la modélisation algébrique, l'expression et la justification de généralisations, etc.).

6.2.2 L'approche «structures»

Cette approche didactique de l'algèbre est basée sur la composante *élaboration et application de structures* (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) *et de procédures* (règles, algorithmes, heuristiques, etc.) de la face algèbre du modèle M.I.A.P.A.

Les structures algébriques telles que le monoïde, le groupe, l'anneau, le corps, l'espace vectoriel, etc. sont définies à l'aide d'un système d'axiomes que doivent vérifier la ou les opération(s) algébrique(s) en jeu[59]. Ces axiomes, et les théorèmes qui en découlent, permettent de justifier les règles du calcul algébrique valides dans ce type de structures.

Ces structures peuvent être ordonnées selon un ordre de filiation (par exemple : monoïde → groupe → anneau → corps). Les axiomes de la structure de monoïde font

[59] Une structure algébrique peut contenir aussi à côté d'une ou de deux opérations algébriques un autre type de relation, une relation d'ordre par exemple. Dans ce cas, des axiomes de compatibilités viennent s'ajouter à la liste d'axiomes purement algébriques.

logiquement partie des axiomes définissant celle de groupe qui, à leur tour, font logiquement partie des axiomes de la structure d'anneau et ainsi de suite. Autrement dit, tout corps est un anneau qui est lui-même un groupe, qui est lui-même un monoïde. Ainsi, lorsqu'on se déplace dans le sens indiqué dans cette chaîne, on doit à chaque pas ajouter des axiomes supplémentaires. Cette filiation des structures a été popularisée surtout par le groupe Bourbaki. Elle incite à structurer le contenu algébrique à enseigner de manière analogue : on part d'une structure algébrique simple, comme celle de monoïde, dont on étudie les propriétés tout en mettant en place une terminologie spécifique (fermeture de l'opération, commutativité, distributivité, élément neutre, élément symétrique, etc.), puis, on ajoute progressivement des axiomes et on définit de nouvelles structures. C'est une telle approche qu'on utilise dans l'enseignement de l'algèbre à l'université basée sur la méthode axiomatique.

Nous pensons qu'une telle approche didactique présentant l'algèbre comme une théorie axiomatisée n'est pas pertinente dans l'éducation de base. Par approche «structures», nous entendons une approche qui vise l'élaboration et l'application de structures algébriques spécifiées et de structures de situations algébrisables. Dans les sections 3.3.4 et 3.4.4, nous avons expliqué la composante de l'algèbre sur laquelle se base cette approche, ainsi que l'ensemble des principales habiletés qu'elle nécessite.

Faisons observer que dans cette approche, nous incluons aussi la mise en évidence de structures de situations algébrisables, par exemple celle d'une régularité numérique. Considérons, par exemple, le problème suivant :

Suite 1 :	1,	4,	7,	10,	13,	?
Suite 2 :	1,	2,	4,	8,	16,	?
Suite 3 :	2,	6,	11,	18,	29,	?

1. Pour chacune des suites de nombres, calculer le terme suivant.
2. Pour chacune des suites de nombres, calculer le terme de rang 100.

Pour simplifier l'exposé, désignons par U, V et W les suites 1, 2 et 3 respectivement. Dans un premier temps, l'appréhension des régularités, que l'on pourrait exprimer par : $U_{n+1}=U_n+3$; $V_{n+1}=2V_n$; $W_n=U_n+V_n$ suffisent pour répondre à la première question.

Ces régularités peuvent être interprétées comme des structures de ces situations, et peuvent ne pas être représentées symboliquement. Cependant, elles sont insuffisantes pour répondre à la deuxième question. Il est en effet indispensable d'exprimer ces structures de façon à ce que l'on puisse calculer le 100ème terme de chaque suite de la manière la plus simple possible. Pour cela, on ne peut éviter d'expliciter les formes syntaxiques : $U_{n+1}=1+3n$; $V_{n+1}=2^n$; $W_{n+1}=1+2^n+3n$.

Penser en terme de structure n'implique pas obligatoirement exprimer la structure abstraite sous forme symbolique. La structure d'une situation peut, en effet, ne pas pouvoir être traduite en une expression algébrique. Par exemple, soit le problème suivant :

Quels sont les entiers naturels dont le nombre de diviseurs est impair ?

Ce problème[60] peut être certainement résolu de plusieurs manières. Mais, penser en terme de structure pousse à appréhender la structure de l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel donné. Si d est diviseur de n, alors $m=\frac{n}{d}$ est aussi un diviseur de n (puisque $dm = n$). Il s'ensuit que d et m sont situés de part et d'autre de $\sqrt{n}$ dans l'intervalle $[1 , n]$ ($d \leq \sqrt{n} \leq m$, ou $m \leq \sqrt{n} \leq d$). En se centrant sur l'ensemble des diviseurs de n dans sa totalité, on découvre alors cette propriété de sa structure : les diviseurs de n se répartissent deux à deux par rapport à $\sqrt{n}$. On en déduit que le nombre des diviseurs de n n'est impair que lorsque $\sqrt{n}$ est lui-même un diviseur de n, c'est-à-dire lorsque n est un carré parfait.

Par ailleurs, la construction d'espaces de calcul algébrique, notamment ceux correspondant aux systèmes de nombres, peut être réalisée parallèlement à l'élaboration des structures algébriques spécifiées.

---

[60] Nous nous plaçons ici dans l'espace de calcul algébrique associé au système des nombres naturels muni de la relation de divisibilité.

En résumé, dans l'approche didactique «structures», il apparaît qu'on doit viser notamment les objectifs d'apprentissage suivants :

- Appréhender la notion générale d'opération. Plus particulièrement, développer :
  - *l'habileté à identifier des opérations ainsi que les relations entre elles dans diverses situations,*
  - *l'habileté à reconnaître et utiliser des propriétés des opérations dans divers types de situations*
- Abstraire et généraliser des structures algébriques. Plus particulièrement, développer :
  - *l'habileté à reconnaître des caractéristiques communes à plusieurs systèmes algébriques et, en particulier, identifier deux systèmes algébriques isomorphes ;*
  - *l'habileté à voir une structure algébrique comme une abstraction ou comme une généralisation obtenue à partir de situations particulières*
- abstraire et généraliser des structures de situations algébrisables. Plus particulièrement, développer :
  - *l'habileté à reconnaître des caractéristiques communes à plusieurs situations algébrisables et, en particulier, reconnaître deux situations algébrisables isomorphes; généraliser des règles et des procédures algébriques.*

Comme caractéristiques de cette approche, on peut relever l'utilisation de différentes spécifications de structures algébriques assez tôt dans le cursus, la focalisation sur les propriétés des opérations, l'abstraction de structures à partir de diverses situations algébrisables avant leur utilisation. Par exemple, plusieurs situations algébrisables ont comme structure commune une équation algébrique. Dans les curriculums traditionnels d'algèbre, on enseigne la résolution d'équations polynomiales à une inconnue d'abord de degré un, puis de degré deux, sans dépasser toutefois le troisième degré (sauf dans des cas très particuliers). Cependant, l'élève n'a pas l'occasion d'effectuer le travail d'abstraction conduisant à la mise en évidence de ces structures syntaxiques que sont les équations polynomiales, à partir de relations entre variables de situations algébrisables isomorphes. Il doit se contenter de les manipuler syntaxiquement. Dans l'approche «structures», au contraire, on doit d'abord viser à ce que l'équation $ax^2+bx+c=0$, par exemple, soit perçue comme une abstraction d'une

classe de situations algébrisables isomorphes avant d'entamer l'enseignement d'une procédure générale de sa résolution.

6.2.3 L'approche «modélisation»

Cette approche didactique de l'algèbre repose principalement sur la composante *construction et interprétation de modèles de situations réelles ou mathématiques* de la face algèbre de M.I.A.P.A. Elle réfère aussi à la composante *manipulation d'expressions algébriques selon des règles prédéfinies*. Elle est ainsi fondée théoriquement.

Sa principale particularité est qu'elle offre le moyen d'arrimer les mathématiques au monde réel. Ce qui, pense-t-on, rendrait l'enseignement des mathématiques plus significatif pour les élèves et moins replié sur lui-même.

Elle consiste à apprendre l'algèbre en pratiquant la modélisation algébrique, processus que nous avons expliqué dans 3.3.2. Apprendre à modéliser est rarement un objectif important dans les curriculums traditionnels d'algèbre. Pour les besoins didactiques, les auteurs de manuels traditionnels "fabriquent" des problèmes artificiels sur lesquels les élèves vont développer leur savoir algébrique. De ce fait, une grande partie du travail de modélisation ne sera pas traitée par les élèves, notamment ce que Pollak appelle l'analyse de la situation réelle et la formulation de la question idéalisée. La stratégie qui sera le plus souvent utilisée consiste à amener l'élève à résoudre des exercices algébriques scolaires et, par la suite, à appliquer cet apprentissage à la résolution de problèmes en dehors des mathématiques. Mais même dans ce cas, les situations réalistes utilisées sont souvent artificielles.

L'approche «modélisation», par contre, utilise la modélisation algébrique très tôt dans le cursus comme outil pour étudier diverses situations ou phénomènes réels, et aussi, comme outil pour la mise en place du calcul algébrique. La première fonction de la modélisation est familière, la seconde l'est beaucoup moins. Comme l'explique Chevallard (1989), la modélisation est un processus réversible, le système modélisé peut

apparaître, à rebours, un modèle de son modèle. Par exemple, la notion de vecteur est un modèle de la notion de force en physique. Mais cette dernière peut être vue comme un modèle de la notion de vecteur et être un point de départ de l'initiation à l'algèbre linéaire.

Cette manière d'utiliser la modélisation peut être efficace pour approcher des concepts ou des procédures très complexes pour les élèves d'un certain niveau. Par exemple, il est clair qu'un élève en début de secondaire ne dispose d'aucun moyen mathématique formel pour établir que :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

et découvrir l'idée que le terme de gauche de l'égalité s'approche de plus en plus de 1 lorsque n devient de plus en plus grand. Considérons le problème suivant.

> Alain décide de manger sa pizza de la manière suivante: À l'étape 1 , il commence par en manger la moitié, à l'étape 2 il mange la moitié du reste, à l'étape 3 il mange la moitié du reste de l'étape 2, et ainsi de suite.
> Quelle est la part de pizza qu'Alain aura mangé à l'étape 100 ?

Il n'est pas difficile pour les élèves de dresser le tableau suivant:

Étapes	Nouvelle part mangée	Part restante
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
.....	.....	.....
100	$\frac{1}{2^{100}}$	$\frac{1}{2^{100}}$

À L'étape 100, Alain aura donc mangé : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....+\frac{1}{2^{100}}$ de sa pizza. Il lui restera alors $\frac{1}{2^{100}}$ de sa pizza, c'est-à-dire qu'il aura mangé en tout jusqu'à cette étape $(1-\frac{1}{2^{100}})$ de la pizza. D'où l'égalité : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}=1-\frac{1}{2^{100}}$. On peut alors dire que cette situation fournit un modèle de cette égalité complexe. De là, il n'y a qu'un pas pour que l'élève arrive à la généralisation : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$, qui montre que l'on s'approche de plus en plus de 1, lorsque n est de plus en plus grand. L'élève approcherait cette idée non pas en se basant sur le fait que la suite de terme général $1-\frac{1}{2^n}$ est croissante et tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, mais en se basant sur la situation réaliste de l'exemple du problème de la pizza. En effet, il n'est pas hors de portée de l'élève de comprendre que plus le nombre d'étapes augmente, plus la part de pizza restante est petite, et donc plus la part totale de la pizza mangée par Alain s'approche de 1.

Dans une activité de modélisation, l'objet du travail revient à étudier algébriquement la structure de la situation (idéalisée), soit à décrire et à transformer le système de relations entre les variables à l'aide d'une ou plusieurs formes algébriques, lesquelles permettent de fournir les éclairages voulus relativement au système de rapports entre ces variables.

Comme caractéristiques de cette approche didactique de l'algèbre, on peut relever l'utilisation importante d'activités de modélisation algébrique de situations réelles ou mathématiques et ce très tôt dans l'apprentissage de l'algèbre, l'utilisation de multiples contextes, l'exploitation des sémantiques de situations algébrisables dans l'élaboration du calcul algébrique et dans la construction d'espaces de calcul algébrique.

Remarquons que si l'approche modélisation doit être utilisée tôt dans le cursus, elle nécessite alors l'utilisation de moyens d'aide à l'apprentissage permettant à l'élève de pallier son manque de compétence mathématique à résoudre des équations algébriques

complexes, à exécuter certains calculs algébriques complexes, à représenter graphiquement une relation fonctionnelle à partir de son écriture algébrique ou l'inverse, à générer une fonction à partir d'un tableau de données numériques, etc. Le recours à des moyens technologiques semble donc inévitable pour utiliser efficacement cette approche à l'école. Il permet d'étudier assez tôt des modèles de diverses situations dont la représentation algébrique est complexe, ce qui est le cas de nombreuses situations du monde réel, alors que traditionnellement on est forcé de se restreindre à étudier les formes algébriques simples, en l'occurrence les formes polynomiales, ne dépassant pas le second degré sauf dans des cas très particuliers.

6.2.4 L'approche «fonction»

Cette approche didactique de l'algèbre réfère principalement à la composante *construction et interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques* de la face algèbre du M.I.A.P.A. En effet, le modèle de situations mathématiques ou phénomènes du monde réel peut être représenté par une relation fonctionnelle. Elle peut aussi toucher les deux autres composantes de la face algèbre sitôt que l'idée de variation est présente. Toutefois, elle va à l'encontre du courant historique du développement de l'algèbre, puisque le concept de fonction y est venu très tard. En effet, comme le fait remarquer Kieran :

> From the preceding historico-psychologico analysis, reinforced by the available research literature, we see not only that functional algebra was late in developing historically, but also that students appear to have a great deal of difficulty with this advanced kind of algebra. (Kieran, 1994, p.162)

L'objectif dans cette approche n'est pas d'étudier les fonctions, comme on le fait généralement en analyse, mais d'apprendre à décrire, à manipuler et à interpréter des relations fonctionnelles algébriques, c'est-à-dire celles pouvant être représentées par des expressions algébriques. La principale caractéristique de cette approche est que dans le type de relations qu'on étudie, il y a l'idée de *variation*. Une expression algébrique comme $2x + 1$ est interprétée comme une relation fonctionnelle entre la variable x, qui

en est l'argument, et la variable $y = 2x + 1$ qui en est la variable dépendante. Les lettres x et y désignent donc ici des variables qui varient. Plus précisément, une fonction met en jeu trois ingrédients : le domaine qui est le lieu de l'argument x, le domaine qui est celui de la variable dépendante y et enfin une relation fonctionnelle qui traduit la nature de la dépendance entre les deux variables.

Remarquons que le concept de fonction n'est pas un concept intrinsèquement algébrique. Il est un des concepts unificateurs des mathématiques — comme celui d'ensemble, par exemple – et il se retrouve souvent au centre de diverses activités mathématiques non nécessairement algébriques. Quand, alors, peut-on dire que le concept de fonction relève de l'algèbre et non de l'analyse, par exemple ? Rappelons qu'il l'est dans les trois cas suivants : soit que la relation fonctionnelle peut être décrite par une expression algébrique, soit que la fonction est elle-même élément d'un système algébrique (un espace fonctionnel sur lequel sont définies une ou plusieurs opérations, par exemple la composition de fonctions), et alors elle est considérée globalement comme un objet, soit enfin que la fonction est elle-même l'opération, unaire, définie dans le système algébrique. En algèbre élémentaire, ces deux derniers cas ne sont presque jamais considérés.

Fey et Good (1985) voient dans ce qui suit les questions-clés sur lesquelles on peut baser l'étude de l'algèbre suivant cette approche :

> For a given function f(x), find__
> 1. f(x) for x = a;
> 2. x so that f(x) = a;
> 3. x so that maximum or minimum values of f(x) occur;
> 4. the rate of change in f near x = a;
> 5. the average value of f over the interval (a , b). (Fey et Good 1985, p. 48)

Les deux premières questions sont aussi traitées dans d'autres approches didactiques de l'algèbre. En effet, dans la première il s'agit simplement de calculer la valeur prise par une expression algébrique pour une certaine valeur; la deuxième peut être interprétée comme la résolution d'une équation. Remarquons que dans une approche «fonction», la résolution d'équations devient un cas particulier de la recherche de la valeur de

l'argument pour laquelle deux variables prennent une valeur identique : trouver x, tel que $f(x) = g(x)$. De plus, de telles équations peuvent être résolues par des méthodes graphiques. Les trois dernières questions sont plus spécifiques à l'approche «fonction», car contrairement aux deux premières, elles renferment l'idée de variation.

L'idée de variation d'une fonction est traditionnellement interprétée comme une idée d'analyse et non d'algèbre. Il nous semble que cette idée peut être abordée par le biais de l'algèbre, du moment que la relation fonctionnelle est algébrique et que l'on ne fait pas intervenir la notion de limite, restant dans le cadre de processus finis seulement.

Dans ce sens, cette approche de l'algèbre peut être interprétée comme une préparation à l'analyse. En effet, en étudiant les variations d'une fonction, elle permet d'étudier localement le comportement de la fonction au voisinage de certains points, préparant ainsi le passage à la notion de limite. Mais cette étude nécessite une très bonne maîtrise du langage algébrique. Dans les curriculums classiques d'algèbre, cela n'est généralement possible que vers les dernières années de l'école.

Si l'approche «fonction» est utilisée tôt dans le cursus, elle nécessite alors l'utilisation de moyens d'aide à l'apprentissage permettant à l'élève de pallier son manque de compétence mathématique à résoudre des équations algébriques complexes, à exécuter certains calculs algébriques complexes; à représenter graphiquement une relation fonctionnelle à partir de son écriture algébrique ou l'inverse, à générer une fonction à partir d'un tableau de données numériques, etc. Le recours à des moyens technologiques semble donc incontournable pour utiliser efficacement cette approche à l'école.

L'usage d'outils technologiques permet d'étudier assez tôt des questions qui sont hors de portée d'une approche plus classique, par exemple la recherche de minima ou de maxima de fonctions – et plus généralement, toutes les questions faisant appel à la notion de taux de variation d'une fonction ou la résolution d'équations ou d'inéquations où l'expression algébrique est complexe.

Finalement, comme caractéristiques de l'approche «fonction», relevons l'importance qu'occupent les concepts de fonction, de variation et de variable dépendante dans le contenu algébrique à enseigner. Ces notions sont introduites très tôt dans le cursus avant même que le formalisme du calcul algébrique ne soit mis en place. Trois formes de représentation sont utilisées, littérales, graphiques, tableaux de données, et le passage d'une forme de représentation à une autre fait partie des objectifs de l'enseignement de l'algèbre. L'utilisation de supports technologiques est indispensable pour générer des tableaux de valeurs, tracer des graphes et raisonner sur ces graphes (méthode graphique de résolutions d'équations ou d'inéquations, par exemple), passer d'un mode de représentation à un autre (ajustement de courbes, par exemple) ou encore effectuer un calcul algébrique complexe (système symbolique mathématique).

6.2.5 Proposition d'une approche didactique «mixte» de l'algèbre dans l'éducation de base

Les quatre approches didactiques de l'algèbre que nous venons de présenter demeurent théoriques; chacune d'elles insiste sur un aspect particulier mais néanmoins important de l'apprentissage de l'algèbre. En pratique, durant la période de l'éducation de base, l'enseignement de l'algèbre à l'école touche à plusieurs de ces approches didactiques, mais sans nécessairement les intégrer. Ainsi, dans le cas du curriculum d'algèbre marocain en vigueur depuis les années 1980, les trois premières années de l'apprentissage de l'algèbre sont réservées essentiellement à la mise en place du calcul algébrique et aux extensions successives des systèmes de nombres classiques. Durant cette période, on utilise une combinaison de certains aspects des approches «langage» et «structures». Dans les classes supérieures, on étudie les fonctions et ce n'est qu'exceptionnellement que l'on traite de la modélisation algébrique.

Par approche didactique «mixte» de l'algèbre, nous entendons une approche qui intègre de façon cohérente les approches «langage», «structures», «modélisation» et «fonction»

(figure 6.1). C'est une telle approche que nous proposons d'utiliser dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base .

Une approche «mixte» incarne la vision pluraliste de l'algèbre que nous adoptons. En effet, rappelons que nous avons vu au chapitre 3 qu'il existe plusieurs aspects caractéristiques de l'algèbre. En tant que discipline scientifique, l'algèbre ne peut se résumer à un seul de ces aspects essentiels. Par suite, toute transposition didactique de l'algèbre doit tenir compte de tous ces aspects à la fois. Seule une approche didactique «mixte» satisfait à ces exigences.

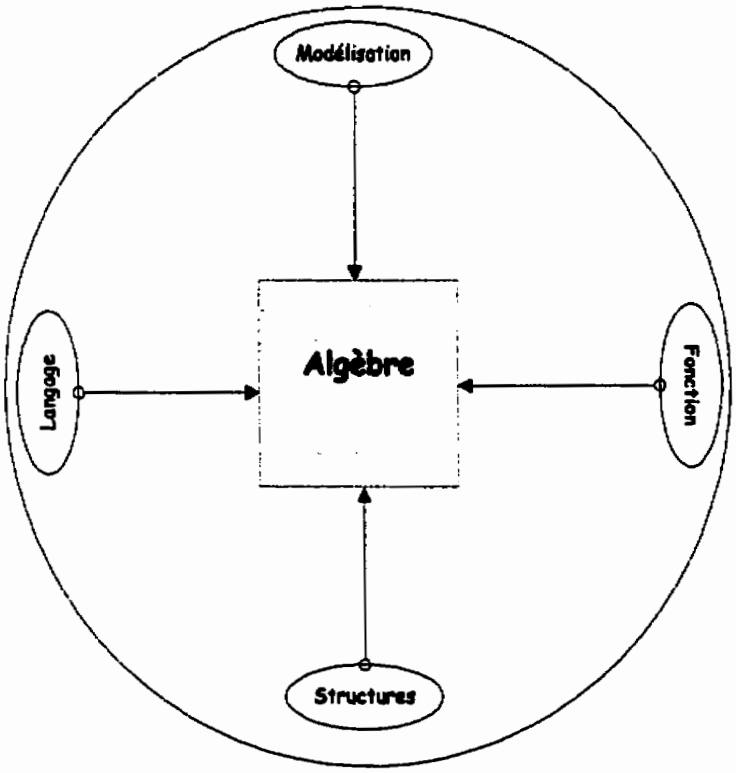


Figure 6.1 : Approche didactique mixte de l'algèbre

Actuellement, de plus en plus d'éducateurs sont partisans d'une approche didactique «mixte» de l'algèbre dans l'éducation de base. Présentant différentes approches didactiques proposées dans un ouvrage collectif récent, Bednarz, Kieran et Lee (1996) affirment:

> In the international community, the teaching and learning of algebra have recently received a great deal of research interest, and different approaches aimed at making this learning meaningful for students have been proposed: generalization of numerical and geometric patterns and of the laws governing numerical relations, problem solving, equation solving aided by the use of concrete models, introduction of functional situations, and the modeling of physical and mathematical phenomena. (p. 3)

Wheeler de son côté, commentant quatre approches didactiques de l'algèbre, fait remarquer :

> One cannot doubt that the four topics can claim a place in all but the most basic mathematics curriculum, and each makes an important contribution to mathematical literacy (Wheeler, 1996, p. 321).

Pour sa part, le groupe de travail du NCTM chargé de proposer un cadre de référence pour construire une vision de l'algèbre pour tous affirme dans son rapport :

> Recognizing that algebra is continually shifting in its scope, focus, and applications implies a multi-dimensional approach to school algebra. (NCTM, 1995, p. 20).

À leur tour, les auteurs du document ««Principles and Standards for School Mathematics» de 2000 du NCTM écrivent :

> Algebra can be thought of in many ways – as patterns, functions, and relations; as language, representation, as structures based on generalized arithmetic; or as a tool for modeling mathematical ideas and problems. All of these views of algebra are found in the middle grades. (...) they would be interwoven in a quality school mathematics program.
> (NCTM, 1998, p. 221)

Dans notre perspective, une approche didactique «mixte» peut se concrétiser de plusieurs façons, tout dépendant de la manière d'intégrer les quatre approches didactiques théoriques et du degré de cohérence de leur intégration. Le fait de combiner plusieurs approches didactiques de l'algèbre pose le problème de cohérence du curriculum, auquel les didacticiens des mathématiques et les concepteurs de curriculums apportent différentes solutions. En effet, les curriculums diffèrent par le type de thèmes organisateurs (ou «organisateurs conceptuels») choisis pour assurer une cohérence à l'approche didactique privilégiée (NCTM, 1997). Au cours de l'histoire de l'enseignement de l'algèbre, différents thèmes organisateurs ont été utilisés, par exemple

celui de structure dans les "mathématiques modernes" des années 1960, celui d'algèbre comme langage dans le cadre du mouvement "retour aux bases" ("Back-to-Basics") qui a suivi, celui de fonction avec l'arrivée des calculatrices graphiques dans les années 1990.

Chaque option choisie pour organiser le curriculum implique une manière de structurer le contenu algébrique à enseigner. Ainsi, dans l'algèbre des «mathématiques modernes» le contenu algébrique à enseigner est structuré selon la filiation des structures algébriques, une logique disciplinaire. Un autre type de solution consiste à structurer le contenu en adoptant une certaine orientation méthodologique, par exemple, en basant l'apprentissage de l'algèbre sur la résolution de problèmes, sur la généralisation de l'arithmétique ou sur l'étude de certains thèmes mathématiques importants.

L'approche didactique mixte de l'algèbre entend réaliser une certaine intégration cohérente des apprentissages reliés à chacune des quatre approches didactiques : «langage», «structures», «modélisation» et «fonction» que nous avons soulignées précédemment. Naturellement, cela ne signifie pas que les quatre approches doivent apparaître à tout moment du cursus, en même temps et avec le même degré d'importance. Il est possible qu'à un moment de l'apprentissage de l'algèbre on emploie une approche de façon plus particulière. Il existe ainsi plusieurs manières de concrétiser une approche didactique «mixte».

Faisons observer que pour initier l'élève à l'algèbre, on doit l'amener à appréhender la notion générale d'opération. Sans une prise de conscience de l'opération, il n'y a pas d'algèbre. Au tout début de l'apprentissage, on doit familiariser l'apprenant avec de multiples situations où figurent des opérations. En utilisant des situations concrètes spécifiant des structures algébriques (voir les exemples donnés dans 3.3.4), l'apprenant peut s'initier à comparer les propriétés des opérations et à identifier les structures algébriques isomorphes. La recherche de régularités est un thème qui peut aussi être abordé au début de l'apprentissage de l'algèbre. Voilà deux exemples de l'utilisation de

l'approche «structures». Il est important d'utiliser des contextes différents, pas toujours numériques. L'apprentissage du langage algébrique doit être une préoccupation constante et se faire progressivement et parallèlement au développement des autres aspects de l'algèbre. Quand l'enseignement de l'algèbre commence assez tôt dans le cursus, on ne doit pas utiliser le formalisme algébrique, mais un langage qui s'approche du langage naturel de l'élève. La notion d'équation peut être abordée après la familiarisation avec des structures abstraites de diverses situations algébrisables et l'initiation à la notion d'inconnue et à la pensée analytique. Elle peut aussi être vue comme le produit d'une modélisation algébrique. L'approche «modélisation» s'intègre bien avec l'approche «fonction». En effet, une relation fonctionnelle peut être le modèle de plusieurs situations réelles ou mathématiques. La connaissance de propriétés de certaines fonctions permet de modéliser algébriquement plusieurs situations réelles ou mathématiques. Inversement, la connaissance de certains aspects d'une situation algébrisable peut donner des éclairages sur la fonction qui la modélise.

Dans la section qui suit, nous allons examiner certaines approches traditionnelles de l'algèbre pour les comparer à notre proposition d'une approche didactique «mixte».

6.3 QUELQUES APPROCHES DIDACTIQUES UTILISÉES TRADITIONNELLEMENT DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE

6.3.1 L'approche «arithmétique généralisée»

Selon Kieran et Wagner (1989), l'algèbre peut être vue comme une *arithmétique généralisée* de deux manières différentes :

> On the one hand, we think of algebra as *generalized* arithmetic, in which case we focus on the link between algebra and its numerical referents. On the other hand, we can think of algebra as *generalized* arithmetic, in which case we focus on the structural aspects of the number system. (Kieran et Wagner, 1989, p. 221)

La première signification de l'algèbre en tant qu'arithmétique généralisée est sans doute la plus ancienne. Les extraits suivants, issus de deux manuels anciens, décrivent succinctement cette approche :

> L'algèbre a pour objet de généraliser les calculs de l'arithmétique; de donner des règles simples pour la résolution des problèmes numériques et de fournir des formules représentant, sous une forme condensée, le résultat d'un type de problèmes.
> Pour atteindre ce but, elle emploie les lettres et les signes.
> [...] Les lettres servent à représenter les nombres.
> Au lieu de raisonner, comme en arithmétique, sur des nombres: 4, 5, 2/3, etc. , on raisonne sur des lettres: a, b, c, ..., x, y,... censées représenter des nombres connus ou à connaître. Les résultats auxquels on parvient ainsi offrent une grande généralité, car, comme on ne précise pas sur quels nombres on opère, ils sont vrais pour tous les nombres. (Bourlet, non daté, p.1)[61]

> Le but de l'algèbre est la simplification et la généralisation des questions sur les nombres. La simplification résulte de l'emploi de signes pour indiquer les opérations, et de lettres pour désigner les nombres cherchés. La généralisation résulte de l'emploi de lettres pour représenter les nombres donnés. (Vacquant et Lépinay, 1922, p.5)

Cette approche se distingue, nous semble-t-il, plutôt par son aspect méthodologique : obtenir l'algèbre en généralisant l'arithmétique, en utilisant des lettres pour représenter des nombres et des signes pour représenter les opérations. L'arithmétique est de portée assez limitée, son outil essentiel est le langage ordinaire augmenté du calcul sur les nombres; son arsenal logistique est constitué de formulettes, établies pour mémoriser des schèmes de calcul parfois forts habiles (règles de la fausse position, par exemple) (Combier et al., 1996), pour traiter une classe de problèmes types mis en évidence à travers des formulations stéréotypées et quelques variantes. Présentée traditionnellement comme l'heureuse rivale de l'arithmétique, l'algèbre est au contraire de portée illimitée. Le fait de représenter par des lettres les quantités connues permet de se débarrasser de la «numérosité» des nombres et d'accéder ainsi à un langage (littéral) de portée générale. D'un autre côté, le fait de représenter par des lettres les

[61] La version consultée du manuel est la 13ème édition. Comme il y est mentionné, elle est conforme au programme officiel français du 4 mai 1912.

quantités inconnues donne la possibilité de raisonner analytiquement et de disposer ainsi d'un puissant outil de résolution de problèmes, arithmétiques en particulier.

À titre d'illustration de cette approche traditionnelle, référons-nous à un manuel d'algèbre datant de 1922 (Vacquant et Lépinay, 1922). Le plan d'introduction de l'algèbre de ce manuel est le suivant:

> 1) Emploi des signes pour indiquer les opérations arithmétiques
> 2) Emploi de lettres pour représenter les inconnues et les données d'un problème
> 3) Comparaison de la résolution d'un problème par l'arithmétique et par l'algèbre
> 4) Nombres arithmétiques avec un signe (entiers et fractions);
> 5) Nombres algébriques
> 6) Extension des opérations sur les nombres arithmétiques aux nombres algébriques
> 7) Opérations sur les monômes et polynômes
> 8) Équations, systèmes d'équations, inéquations

Les trois premières sections sont destinées à motiver l'introduction de l'algèbre en montrant que celle-ci constitue un outil de résolution de problèmes plus puissant que l'arithmétique. Dans une section préliminaire, les auteurs commencent par préciser les buts de l'algèbre, expliquer l'emploi des signes pour représenter les opérations à l'aide d'exemples numériques, puis présenter quelques notations et conventions (puissance d'un nombre, racine n-ième, relation d'égalité, signes plus grand que et plus petit que, etc.). Après cette section préliminaire, les auteurs abordent le thème "Emploi des signes pour indiquer les opérations et des lettres pour représenter les inconnues." Ils expliquent:

> Pour simplifier la résolution d'une question d'arithmétique, il y a souvent avantage à représenter les nombres inconnus par des lettres, et à indiquer au moyen de signes les opérations à effectuer sur les nombres donnés et sur les nombres inconnus. (Vacquant et Lépinay, 1922, p. 9)

L'avantage présumé de la méthode algébrique sur la méthode arithmétique est illustré au moyen de deux exemples. Nous n'en reproduisons que le premier.

> Problème Trouver deux nombres connaissant leur somme 17 et leur différence 3.

> Pour résoudre cette question sans le secours des signes nous dirions: La somme 17 des deux nombres cherchés se compose du plus petit de ces deux nombres plus le grand, c'est-à-dire le plus petit augmenté de l'excès 3 du plus grand sur le plus petit. Le nombre 17 est donc égal à deux fois le plus petit nombre cherché, plus 3. Donc 17 moins 3, ou 14 est le double du plus petit nombre cherché; donc enfin, la moitié de 14, ou 7, est le plus petit nombre cherché. L'autre est 7 plus 3, ou 10.
> Reprenons la même question en indiquant les opérations par des signes, et en représentant par la lettre x le plus petit des deux nombres cherchés. Le plus petit des deux nombres étant x, l'autre qui surpasse celui-ci de 3, est $x + 3$; et, comme la somme est 17, on a:
> $$x + x + 3 = 17$$
> ou
> $$2x + 3 = 17,$$
> ou encore, en retranchant 3 de part et d'autre,
> $$2x = 14,$$
> ou enfin, en divisant de part et d'autre par 2,
> $$x = 7.$$
> Le second nombre est $x + 3$, ou $7 + 3$, ou 10.

Après avoir exposé la résolution d'un deuxième problème en suivant la même méthode, les auteurs concluent: «La marche suivie pour résoudre ces deux problèmes est absolument la même dans les deux cas; mais, tandis que la première solution, embarrassée par de longues périphrases, fatigue l'esprit et ne peut être suivie sans peine, la seconde apparaît claire et précise.» (*ibid.*, p. 11).

Les auteurs abordent ensuite l'explication de l'emploi des lettres en algèbre pour représenter les données et énoncer les formules algébriques. Pour justifier l'usage des lettres, ils reprennent les exemples traités précédemment et attestent:

> Toutefois, si dans les problèmes précédents nous sommes arrivés rapidement au résultat demandé, ce résultat trouvé, nous n'avons gardé aucune trace des calculs effectués pour y parvenir; et, pour traiter une question toute semblable, ne différant de la première que par la grandeur des données numériques, il faut tout recommencer à nouveau. On fait disparaître cet inconvénient en désignant par des lettres les données de la question, comme les inconnues. On emploie ordinairement les premières lettres de l'alphabet, A, B, C..., ou a, b, c..., pour représenter les données, et on réserve les dernières, x, y, z, pour représenter les inconnues. (*ibid.*, p. 11)

Les auteurs reprennent alors les deux problèmes initiaux et en donnent des versions généralisées. Le premier, par exemple, est réécrit de la façon suivante:

Trouver deux nombres, connaissant leur somme a et leur différence b.

Ce problème est alors résolu, selon les mêmes étapes qui ont été suivies dans la résolution de sa version particulière, mais en raisonnant cette fois-ci sur les nombres *littéraux a* et *b* au lieu des nombres *arithmétiques* 17 et 3. Les expressions: $x = \frac{(a+b)}{2}$ et $y = \frac{(a-b)}{2}$ sont appelées *formules*, car précisent ces auteurs, elles font connaître les opérations à effectuer sur les nombres donnés pour en déduire les nombres recherchés.

Les auteurs présentent alors les formules pour résoudre «toutes les questions d'intérêt» (p. 14).

Les sections 4, 5 et 6 sont consacrées à l'extension des opérations arithmétiques et de leurs propriétés sur les nombres arithmétiques (nombres entiers 2, 3, etc., et leurs fractions, 2/3, etc. non affectés de signes, soit les nombres rationnels positifs) aux nombres algébriques (nombres entiers et leurs fractions affectés d'un signe + ou d'un signe -, soit les nombres rationnels, positifs et négatifs).

Après avoir prolongé le calcul arithmétique à l'ensemble de tous les nombres rationnels, positifs et négatifs, on aborde de front, à la section 7, le calcul sur les polynômes (i.e.: l'algèbre des polynômes). Un polynôme est conçu comme «un ensemble de nombres, de lettres et de signes indiquant une suite d'opérations à effectuer sur les nombres et sur les nombres représentés par des lettres.» (Vacquant et Lépinay, 1922, p. 83).

Une fois exposé le calcul algébrique, on peut étudier les équations, les systèmes d'équations et les inéquations (section 8).

Notons, comme il ressort de l'analyse de Chevallard (1984), que longtemps les textes d'enseignement adoptaient le plan d'exposition suivant: *Nombres algébriques, calcul algébrique, équation, résolution d'équations* et, selon Chevallard, cette tradition remonterait à Euler.

Cette approche didactique de l'algèbre est ancienne et a prévalu longtemps dans l'histoire de l'enseignement de l'algèbre. Elle est fondée sur l'idée que l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre doivent être basés sur les apprentissages réalisés en arithmétique.

Les origines de ce fait sont d'abord d'ordre historique. Car dès ses débuts, l'algèbre a été influencée par l'arithmétique. Bien que la géométrie ait aussi contribué à l'émergence et au développement de l'algèbre, le courant arithmétique a été dominant. Il débuta avec le projet *d'arithmétisation* de l'algèbre de l'école d'al-Karaji, au onzième siècle, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2.

Prendre l'arithmétique comme prérequis à l'apprentissage de l'algèbre est aussi un argument d'ordre didactique qui met en avant la dialectique de l'ancien et du nouveau, permettant ainsi de créer, espère-t-on, une certaine continuité dans l'enseignement des mathématiques. En outre, cette approche apporte une solution au problème de la mise en place du calcul algébrique; l'arithmétique fournit en effet à la fois le fondement et le mobile du calcul algébrique.

À notre avis, cette approche didactique de l'algèbre ne tient pas suffisamment compte des aspects modélisation et fonction. Par ailleurs, de nombreux travaux empiriques montrent les difficultés qu'éprouvent les élèves dans l'apprentissage de l'algèbre comme arithmétique généralisée.

La deuxième signification de l'algèbre en tant qu'arithmétique généralisée mentionnée par Kieran et Wagner (voir la citation au début de la présente section 6.3.1) est celle de l'étude des structures des systèmes de nombres.

Comme exemple de cette approche, on peut citer un manuel d'algèbre en vigueur aux États-Unis d'Amérique dans les années 1960. Les auteurs nous expliquent dans ce qui suit l'approche utilisée dans leur manuel:

> The objectives of this First course in algebra is to help the student develop an understanding and appreciation of some of the algebraic structure exhibited by the real number system, and the use of this structure as a basis for the techniques of algebra. More specifically, we are interested in an exploration of the properties of addition and multiplication of real numbers and their order properties. Later in the course we have occasion to consider polynomials, which, as a class, also exhibit an algebraic structure which derives from the fact that they satisfy some (but not all) of the above set of properties. (SMSG, 1961, p. ix)

Dans l'annexe A, on peut consulter la table des matières de ce manuel. Elle permet d'illustrer, en effet, que si l'objectif avoué est d'amener les élèves à développer une compréhension de quelques aspects de la structure algébrique (mixte) du système des nombres réels, un objectif inavoué est d'introduire les concepts et la terminologie spécifique à l'algèbre abstraite. En fait, les véritables objets d'étude sont non pas les nombres mais les opérations, non pas les systèmes de nombres mais les structures algébriques abstraites qui les caractérisent. Remarquons que dans cette approche didactique de l'algèbre, les aspects «modélisation» et «fonction» ne sont pas considérés. La conception de l'algèbre comme une arithmétique généralisée a fortement marqué l'algèbre enseignée à l'école. Ce n'est que dernièrement que l'idée de s'éloigner de cette tradition d'enseignement de l'algèbre a commencé à recueillir une relative unanimité auprès des éducateurs[62].

6.3.2 L'approche basée sur les extensions successives des systèmes de nombres

Cette approche didactique de l'algèbre intègre de façon cohérente à la fois l'aspect étude de structures algébriques des systèmes de nombres et l'aspect «langage» de l'algèbre, et peut être interprétée comme une approche particulière de type arithmétique

---

[62] Vers le début des années 90, on remarque dans le champ de la recherche didactique sur l'algèbre la prédominance de sujets ayant trait à l'élaboration d'approches alternatives de l'algèbre à l'école. C'est un courant de recherche fort présent aux États-Unis ainsi que dans d'autres pays comme le Canada, l'Angleterre ou encore l'Australie. Dans d'autres pays, comme la France, on aborde encore cette question de manière traditionnelle. Dans Kieran, (1992) on trouvera une synthèse des articles de recherches sur l'enseignement de l'algèbre, recherches dont la plus grande partie a pour objet l'étude d'un problème particulier des curriculums d'algèbre existants.

généralisée. En effet, d'un côté, le corpus algébrique à enseigner est structuré selon la filiation des structures algébriques, l'un des objectifs principaux étant l'étude des structures algébriques des systèmes de nombres. D'un autre côté, les systèmes de nombres sont utilisés comme espaces de calcul algébrique à partir desquels on expose, formellement, le calcul algébrique abstrait.

Certains curriculums ont été particulièrement inspirés par cette approche. C'est le cas par exemple, de tous les programmes d'algèbre en vigueur au Maroc depuis les années 1970, au moins. Dans un tel cas, le corpus algébrique enseigné est structuré selon la logique suivante: étant donné un système de nombres S dont les propriétés en tant que structure algébrique mixte (propriétés des opérations arithmétiques usuelles et de la relation d'ordre) sont connues, on étend ce système de nombres à un autre système S' en y adjoignant les nombres qui y «manquent» et en prolongeant à S' les propriétés des opérations valides sur S, selon le «principe de permanence». On étudie ainsi successivement et dans l'ordre, l'ensemble des nombres naturels, l'ensemble des nombres relatifs, (l'ensemble des nombres décimaux[63] dans certains curriculums), l'ensemble des nombres rationnels et, enfin l'ensemble des nombres réels[64]. Une variante de cette approche consiste à commencer par les nombres positifs (naturels décimaux et fractionnaires) et à introduire ensuite les nombres négatifs, en prolongeant des premiers aux seconds les propriétés des opérations.

Nous avons souligné plus haut que dans cette approche, le corpus algébrique est organisé selon une logique de la discipline, ce qui lui donne un certain fondement. D'un autre côté, elle se justifie par des raisons à la fois épistémologiques et didactiques, comme nous allons l'expliquer maintenant.

---

[63] Soit l'ensemble des nombres rationnels dont l'écriture décimale est finie.

[64] En fait, l'extension algébrique à partir du système des nombres rationnels définit le corps des nombres algébriques et non celui des nombres réels. Le prolongement des opérations et de leurs propriétés aux nombres transcendants est basé sur des arguments de nature non algébrique faisant appel aux notions de limite et de continuité.

Le concept de nombre est sans doute l'un des plus importants en mathématiques. Il est, sous une forme ou sous une autre, présent dans les activités mathématiques les plus reculées dans l'histoire. Son développement et son élargissement sont le résultat de longs processus d'abstraction et de généralisation. Les entiers naturels ont été les premiers nombres connus, utilisés et étudiés en mathématiques, suivis par les nombres rationnels positifs, les réels positifs, puis les négatifs, les imaginaires, les hypercomplexes, etc.

Si les nombres réels positifs sont nés plutôt de la nécessité de mesurer des grandeurs, en revanche l'algèbre a joué un rôle de premier plan pour l'émergence d'autres catégories de nombres. Ceci apparaît clairement, nous semble-t-il, dans le cas des nombres entiers négatifs et des nombres complexes. Dans ce dernier cas, en opérant sur des objets imaginaires (les racines des nombres négatifs) selon les règles du calcul algébrique valides jusque là sur l'ensemble des nombres réels, les nombres complexes s'introduisent dans la pratique mathématique comme moyen de calcul – ou comme «artifice de calcul» pour s'exprimer comme Chevallard le fait à propos du cas analogue des nombres entiers négatifs (1989b).

Par ailleurs, nous avons signalé à plusieurs reprises que l'initiation à l'algèbre nécessite l'initiation au calcul algébrique. Et, pour que l'on puisse déployer ce calcul, il y a nécessité de se placer dans un espace de calcul algébrique. Aussi, le développement de l'algèbre s'accompagne-t-il nécessairement du développement d'espaces de calcul algébrique. Vu l'importance du concept de nombre en mathématiques et dans leurs applications, la construction des espaces de calcul algébrique liés aux différents systèmes de nombres est tout aussi importante.

Dans le chapitre 2, nous avons mis en évidence que le développement de l'algèbre élémentaire et celui des systèmes de nombres sont dialectiquement solidaires : d'un côté le calcul algébrique se développe à l'image du comportement des nombres relativement

aux opérations arithmétiques usuelles; d'un autre côté, l'extension du calcul algébrique abstrait permet la conceptualisation de nouvelles catégories de nombres.

Finalement, sur le plan didactique, cette approche se propose de baser l'enseignement de l'algèbre sur les apprentissages faits en arithmétique, en tentant d'utiliser avec profit la dialectique de l'ancien (arithmétique) et du nouveau (algèbre). Elle consiste à fonder le langage algébrique sur le langage arithmétique, à étendre successivement les différents systèmes de nombres, parallèlement au développement du calcul algébrique.

Ainsi, dans une telle approche didactique, on étudie à la fois le langage algébrique et les structures algébriques des systèmes de nombres.

À notre avis, tout comme l'approche arithmétique généralisée, l'approche basée sur les extensions successives des systèmes de nombres n'accorde pas suffisamment d'importance aux aspects «fonction» et «modélisation» et n'aborde que les structures numériques.

6.3.3 Exemples traditionnels de l'approche «langage»

L'aspect langage est généralement présent dans toute approche didactique de l'algèbre, puisque le langage algébrique est un ingrédient essentiel à l'apprentissage et à l'utilisation de l'algèbre. Certains curriculums au cours de l'histoire de l'enseignement de l'algèbre sont allés même jusqu'à réduire l'algèbre à l'apprentissage de son langage.

Comme exemple de cette approche, nous prenons un manuel datant des années soixante, rédigé par un ensemble de professeurs[65] dont le plan suivi structurant le texte d'exposition est à cet égard très illustratif.

> "1. Les définitions, le vocabulaire relatifs à l'algèbre :
> Cette science, comme toutes les autres sciences a un langage, des mots à elle : si l'élève emploie ce langage et ces mots au hasard, il manquera de

[65]Cours d'algèbre. Par un groupe de professeurs sous la direction de Émile Gérard. Éditions pédagogiques de l'école normale secondaire. Montréal: Beauchemin, 1961.

> précisions, de clarté; souvent même les raisonnements qu'il essaiera de faire en seront faussés.
> 2. Les règles de l'écriture algébrique :
> Cette écriture cherche, au moyen de conventions et de symboles, à exprimer les idées sous une forme abrégée mais claire; il faut connaître et ces conventions et ces symboles. (...)
> 3. Les données des théorèmes, l'énoncé des principes:
> Ces théorèmes, ces principes sont des vérités dont nous constaterons ou démontrerons la justesse : ils serviront de base au calcul algébrique.
> 4. Les règles d'opération:
> Ces règles sont, d'ordinaire, la mécanisation d'un raisonnement qu'il n'y a aucun intérêt à répéter indéfiniment : elles permettent d'écrire directement le résultat cherché, sans parcourir chaque fois les étapes du raisonnement qui le justifie." (Gérard, 1961, p. 13)

Les titres des sections de la table des matières illustrent cette nécessité d'introduire les nombres entiers négatifs pour exposer le calcul algébrique, stratégie dont nous avons discuté auparavant. La première partie est consacrée à l'étude du calcul algébrique; elle est formée des titres suivants : *Le nombre algébrique; opérations sur les nombres algébriques; les expressions algébriques; égalités, identités, équations.* La seconde partie, intitulée *Compléments de calcul algébrique*, est formée quant à elle des deux titres suivants: *équations et systèmes d'équations du premier degré; équations et systèmes d'équations.*

Cette approche peut être interprétée comme une arithmétique généralisée, mais elle est en réalité fondée sur l'aspect «langage» de l'algèbre, l'arithmétique étant utilisée justement comme moyen pour exposer ce langage.

Dans ce type d'approche, on utilise généralement une méthode inductive : on induit les règles du calcul algébrique des règles du calcul arithmétique. Dans le manuel que nous venons de citer, par exemple, on expose le calcul sur les nombres dits algébriques (nombres entiers et leurs fractions affectés d'un signe + ou d'un signe -, soit les nombres rationnels, positifs et négatifs) en se basant sur le calcul avec les nombres dits arithmétiques (nombres entiers 2, 3, etc., et leurs fractions, 2/3, etc. non affectés de signes, soit les nombres rationnels positifs) et en justifiant, à l'aide de situations concrètes, la pertinence de calculer avec des nombres entiers négatifs comme on le fait avec les nombres positifs. Le calcul algébrique proprement dit (calcul littéral) est

obtenu en remplaçant dans le calcul sur les nombres algébriques, un nombre algébrique par une lettre. Les auteurs de ce manuel soulignent en effet, « (...) en algèbre une lettre remplace le nombre algébrique tout entier, signe et valeur absolue» (Gérard, 1961, p. 91). Plus loin dans le texte, ils tiennent à faire la remarque suivante :

> Un des premiers pas dans l'étude de l'algèbre consiste à acquérir de la sûreté, de l'aisance dans les calculs où des lettres se substituent aux nombres. Cette sûreté, cette aisance s'acquièrent, facilement quand on a compris que ces calculs "obéissent" aux théorèmes établis pour le calcul des expressions numériques: les lettres en algèbre, sont en quelque sorte des nombres "déguisés". L'étude des théorèmes a été poussée jusque dans les détails pour qu'il nous soit possible de justifier la plupart des calculs littéraux.
> En calculant, l'élève doit prendre l'habitude de répondre à deux questions:
> "Qu'est-ce que j'ai à faire?"
> "Quel est "l'outil pour le faire ?"
> L'"outil" sera le plus souvent un théorème; parfois une définition, une règle d'écriture ou une règle de calcul. (Gérard, 1961, p. 91)

D'autres manuels utilisent une approche déductive pour l'exposé du calcul algébrique. Pour illustrer cette approche, nous allons prendre un manuel d'algèbre ancien[66]. La partie relative à l'algèbre comprend quatre parties:1) Calcul algébrique; 2) Équations du premier degré; 3) Équations du second degré et 4) Progressions, logarithmes, intérêts composés et annuités. Dans l'introduction qui est consacrée à des notions préliminaires, les auteurs précisent de manière succincte le vocabulaire et les conventions qui vont être utilisés en algèbre : signes algébriques; coefficient; exposant, expression algébrique, formule; terme[67]; monôme, binôme, polynôme; ordonner un polynôme; termes semblables; et finalement, valeur numérique d'une expression algébrique.

Dans la première partie, le calcul algébrique est présenté de manière formelle, mais il est illustré sur les nombres. Dès le départ, les auteurs présentent les règles des opérations

---

[66]Petit manuel d'algèbre et de trigonométrie, par une réunion de professeurs: Paris : Gigord 216 p. (Année inconnue)

[67] "Un terme est toute expression algébrique dont les parties ne sont pas séparées par les signes + ou -" (p. 3)

de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division en utilisant des lettres. Voici par exemple la règle de l'addition (p. 5):

> Règle. Pour additionner plusieurs quantités algébriques, il suffit de les écrire les unes à la suite des autres en conservant les signes de leurs termes; on fait ensuite, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.

Et ensuite celle de la soustraction (p. 6):

> Règle. Pour faire la soustraction algébrique, on écrit les deux quantités l'une à la suite de l'autre, en changeant les signes de la quantité à soustraire. On fait ensuite, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.
> Soit $8a - 5b$ à retrancher de $3a^2$, on écrira: $3a^2 - 8a + 5b$.

La règle des signes se trouve implicitement énoncée dans cette règle. Celle-ci suppose la donnée des nombres entiers négatifs, que les auteurs n'ont pas introduits. Mais très vite, ils ne tardent pas à s'apercevoir que la valeur numérique d'une expression algébrique peut être négative. En affrontant ce problème, ils soulignent (p. 8) :

> La valeur numérique d'un polynôme étant la différence qui existe entre la somme de ses termes positifs et celle de ses termes négatifs, si cette différence est un nombre positif, le polynôme a une valeur déterminée; si c'est un nombre négatif, le polynôme a une valeur dont on ne peut se faire une idée bien nette, car nous ne savons pas ce qu'est un nombre négatif. Cependant, on a l'habitude de regarder les nombres négatifs comme étant moindre que zéro, et de dire qu'ils sont d'autant plus petits que leur valeur, abstraction faite du signe, est plus grande.

Remarquons que dans les deux approches précédentes, tout le soin est mis dans la présentation d'un langage minutieux et précis, à travers lequel sont présentées les règles de la syntaxe du calcul algébrique, puis un grand nombre d'exercices, pour que, disent ces auteurs, «la mécanique» du calcul algébrique soit à la fois intelligente, prompte et sûre.» (Gérard, 1961, p. 11). L'intelligibilité du calcul proviendrait de la «conscience» et de la «référence», en cas de besoin, au principe ou à la règle qui est à la base de la transformation de l'expression algébrique utilisée. Le calcul algébrique est par la suite exploité dans l'étude des équations et de leurs résolution.

Cette approche didactique traditionnelle de l'algèbre insiste fortement sur la maîtrise de l'aspect syntaxique du langage algébrique. On ne peut, certes, contester l'importance de l'apprentissage de cet aspect du langage algébrique, mais il ne doit pas être une fin en

soi. En effet, comme pour tout autre langage, on ne peut détacher la syntaxe du langage algébrique de sa sémantique, à moins de voir l'algèbre comme un jeu formel avec des lettres, qui n'est orienté vers aucun but précis. La maîtrise du langage algébrique ne doit pas seulement être formellement valide, elle doit aussi être fonctionnellement pertinente. D'un autre côté, commencer l'apprentissage du langage algébrique par celui de la syntaxe de ce dernier et ensuite apprendre à l'appliquer pour résoudre des problèmes et modéliser des situations réelles ou mathématiques va dans le sens contraire du développement historique de l'algèbre et nous semble une erreur pédagogique. En effet, rappelons qu'historiquement, au commencement de l'algèbre, le calcul algébrique était une sorte d'arithmétique de l'inconnue (soit un calcul sur des expressions polynomiales à une variable qui est l'inconnue et dont tous les coefficients sont des nombres spécifiques). Or, manipuler ces polynômes suppose accepter d'opérer sur l'inconnue et donc suppose penser de manière analytique. De plus, ce calcul algébrique suppose une compréhension préalable des concepts algébriques fondamentaux, d'opération, d'inconnue et d'équation.

6.4 QUELQUES APPROCHES DIDACTIQUES PROPOSÉES RÉCEMMENT POUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE DANS L'ÉCOLE DE BASE

6.4.1 Approches proposées dans un ouvrage collectif récent

Publié en 1996 sous la direction de Nadine Bednarz, Carolyn Kieran et Lesley Lee, l'ouvrage *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching*, présente quatre approches différentes de l'enseignement de l'algèbre proposées par différents auteurs. Nous présentons et discutons chacune de ces approches.

6.4.1.1 La perspective «généralisation» dans l'introduction de l'algèbre

L'un des fervents défenseurs de cette approche ces derniers temps est sans aucun doute John Mason. Pour lui, la généralisation est au cœur des mathématiques :

«Generalization is the life-blood, the heart of mathematics» (Mason, 1996, p. 74). Selon lui, généraliser est une activité tellement centrale dans toutes les mathématiques que les mathématiciens professionnels n'en remarquent pas la présence, parce qu'elle est pour eux élémentaire. Conséquemment, l'enseignement des mathématiques, ajoute-t-il, consiste fondamentalement à rendre les élèves sensibles à la nature de la généralisation mathématique et, de manière duale, à la particularisation. Il conçoit l'algèbre comme le langage qui permet d'exprimer et de manipuler des généralités et il avance :

> (...) of the four principal roots of algebra we identified:
> Expressing generality
> Possibilities and Constraints (supporting awareness of variable)
> Rearranging and Manipulating (seeing why apparently different expressions for the same thing do in fact give the same answers)
> Generalized Arithmetic (traditional letters in place of numbers to express the rules of arithmetic).
> expression of generality is of paramount of importance precisely because it is so often overlooked and under-played. (Mason, 1996, p. 66)

Il est vrai que le processus de généralisation joue un rôle important en algèbre – comme d'ailleurs dans toutes les mathématiques. Mason l'illustre bien au moyen de multiples exemples. Cette observation vaut tout aussi bien pour l'abstraction, un autre processus de pensée faisant partie de la face pensée algébrique de notre M.I.A.P.A.

Selon nous, généraliser et chercher des généralités, ne caractérise pas l'algèbre. Comme l'explique Mason lui-même, «Yet every discipline is concerned with expressing generality, with differences only in what is the generality is about, and how generalities are justified» (Mason, 1996, p. 74). Mais il n'explicite pas cette affirmation dans le cas de l'algèbre.

Pour sa part, Lee préfère parler de l'algèbre en tant que culture; elle pense que l'on peut introduire l'algèbre via les fonctions, la modélisation ou la résolution de problèmes, mais, selon elle, seules les activités de généralisation permettent d'initier l'élève à la culture algébrique. Elle ajoute:

> Nor is it much of a challenge to demonstrate that functions, modeling, and problem solving are all types of generalizing activities, that algebra and

> indeed all mathematics is about generalizing patterns. (Lee, 1996, pp. 102-103)

À notre avis, à l'instar de Lee et surtout de Mason, certains auteurs accordent à la généralisation une importance exagérée en algèbre tout en oubliant de souligner l'importance d'autres composantes de la pensée algébrique. Car abstraire et penser de manière analytique, par exemple, nous apparaissent tout aussi importants en algèbre. De plus, il existe des activités algébriques où le processus de généralisation ne joue pas un rôle central. Par exemple, dans la modélisation algébrique, la manipulation d'expressions algébriques de manière syntaxique, l'abstraction d'une structure ou la résolution d'un problème, d'autres processus sont en jeu de manière plus importante. Pour sa part, Radford (1996, p. 111) fait remarquer avec justesse: «The generalization way of thinking and the analytic way of thinking that characterizes algebraic word problem solving are independent and essentially irreducible, structured forms of algebraic thinking».

6.4.1.2 La perspective «résolution de problèmes» dans l'introduction de l'algèbre

La résolution de problèmes est une perspective à prendre au sérieux dans l'introduction de l'algèbre, estiment Bednarz et Janvier (1996). Elles avancent les raisons suivantes. D'abord historiquement, disent-elles, la résolution de problèmes a joué un rôle capital dans le développement de l'algèbre. Elle était au cœur des travaux de Diophante, de même que de l'algèbre arabe, et explicite dans le cas de Viète qui cherchait à trouver une méthode générale pour résoudre les problèmes. Ensuite, la résolution de problèmes a aussi joué un rôle important dans l'enseignement de l'algèbre.

Dans l'approche qu'elles proposent, une bonne base de connaissances en arithmétique est supposée acquise chez les élèves. L'introduction de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes les conduit alors à chercher les types de problèmes qui faciliteraient le passage de l'élève d'un mode arithmétique à un mode algébrique de résolution. Pour analyser les problèmes que l'on retrouve traditionnellement dans des manuels d'arithmétique et dans ceux d'algèbre, de même que pour étudier les types de

problèmes qui posent des difficultés aux élèves, elles ont élaboré un cadre d'analyse qui se base sur la nature du «calcul relationnel» dans la représentation et la résolution de tels problèmes : la nature des relations entre les quantités en jeu dans le problème, connues et inconnues, et le lien entre ces relations[68].

À titre d'illustration, elles donnent l'exemple du problème suivant:

> 380 students are registered in three sports activities offered during the season. Basketball has 3 times as many students as skating and swimming has 114 more students than basketball. How many students are registered in each of the activities ?

Le schéma suivant montre la structure générale de ce problème (Bednarz et Janvier, 1996, p. 119).

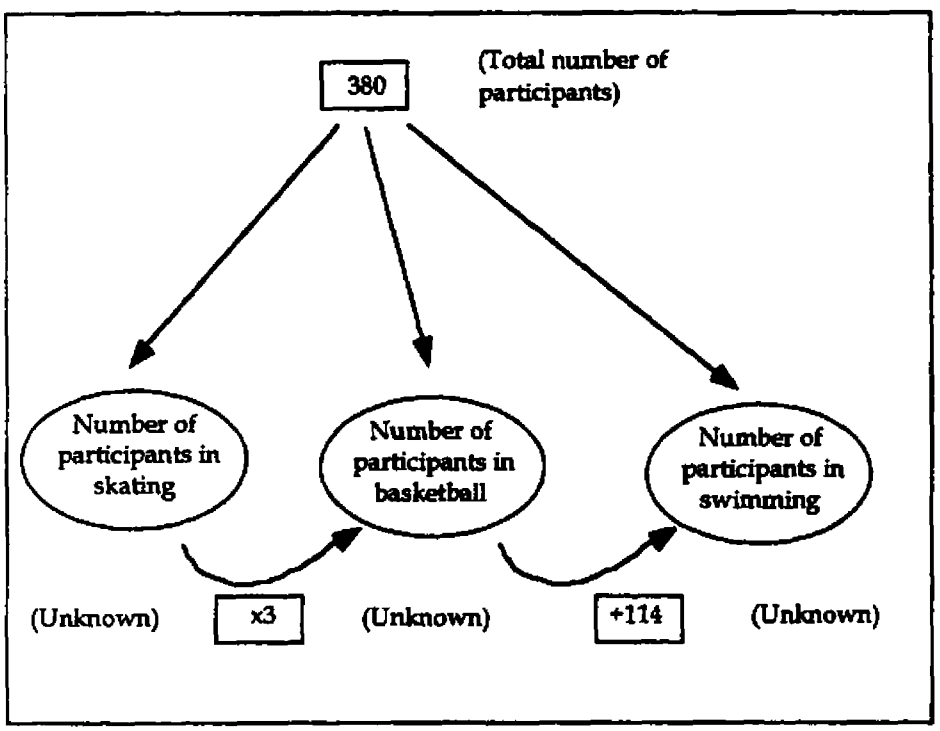


Figure 6.2 :Structure générale d'un problème

[68] Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction : A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ce diagramme montre, estiment-elles, qu'il n'est pas facile d'établir le lien entre deux données connues. Les élèves qui n'ont pas été initiés à l'algèbre peuvent éprouver des difficultés à résoudre ce type de problèmes, parce que «Arithmetic procedures are generally organized through the processing of known quantities, by attempts to create links between them in order to operate on them. The unknown quantities then appears at the end of the process.» (Bednarz et Janvier, 1996, p. 119).

Le tableau suivant illustre les difficultés qu'éprouvent des élèves[69] âgés entre 12 et 13 ans à faire le lien entre les données dans des problèmes de différents types de structures.

[69] La taille de l'échantillon est de 132.

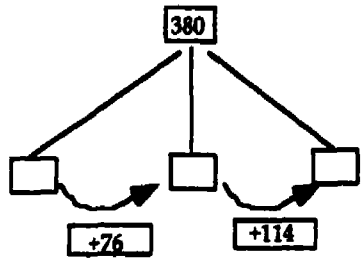
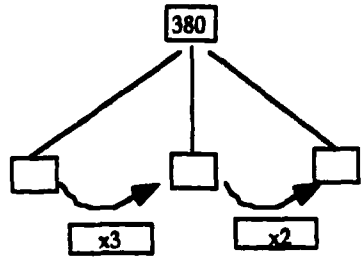
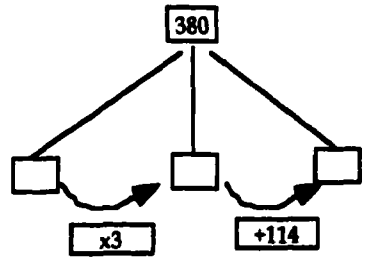
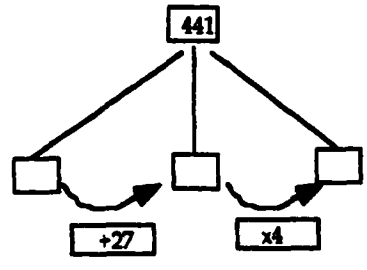
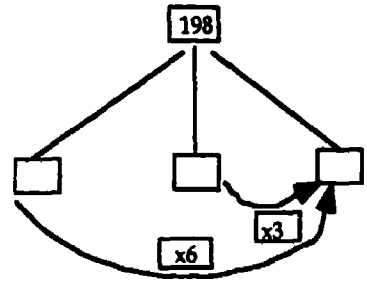
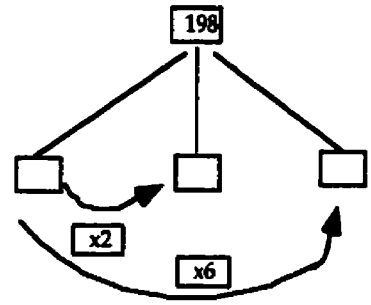
THE PROBLEMS	PROBLEM STRUCTURE	SUCCESS RATE
a) 380 students are registered in three sports activities offered during the season. Basketball has 76 more students as skating and swimming has 114 more students than basketball. How many students are registered in each of the activities ?		5.21%
b) 380 students are registered in three sports activities offered during the season. Basketball has 3 times as many as students as skating and swimming has twice as many as basketball. How many students are registered in each of the activities?		15.6%
c) 380 students are registered in three sports activities offered during the season. Basketball has 3 times as many as students as skating and swimming has 114 more students than basketball. How many students are registered in each of the activities?		2.78%
d) 441 students are registered in sports activities offered during the season. Basketball has 27 more students than skating and swimming has 4 times as many students as basketball. How many students are registered in each of the activities?		11.82%
e) Three children are playing marbles. Together they have 198 marbles. Pierre has 6 times as many as marbles as Denis and 3 times as many as Georges. How many marbles does each child have?		5.56%

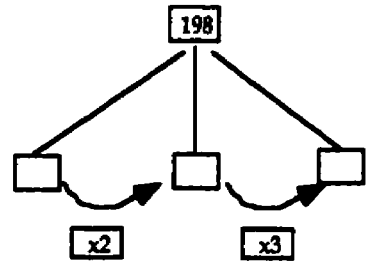
Figure 6.3: Résolution de problèmes de différentes structures

f) Three children are playing marbles. Together they have 198 marbles. Pierre has 6 times as many marbles as Denis and Georges has 2 times as many as Denis. How many marbles does each child have?



31.59%

g) Three children are playing marbles. Together they have 198 marbles. Georges has 2 times as many as Denis and Pierre has 3 times as many as Georges. How many marbles does each child have ?



19.44%

Figure 6.3 (suite): Résolution de problèmes de différentes structures

En analysant la nature des relations entre les quantités d'un problème et la manière dont ces quantités sont liées entre elles, les auteures ont pu distinguer les problèmes que l'on rencontre généralement en arithmétique et ceux que l'on rencontre en algèbre. Elles avancent:

> In arithmetic, the problems that are generally given to students are problems that we will label « connected » : A relationship can easily be established between two known data, thus leading to the possibility of arithmetical reasoning (from the known to the unknown quantity at the end of process) (...)
> On the contrary, in algebra the problems that are generally given to students are ones we label « disconnected »: no direct bridging can be established between the known data, as was the case in the problems in Table 1. (Bednarz et Janvier, 1996, p. 123)

La figure suivante illustre la structure de ces deux types de problèmes (*ibid.*, p.):

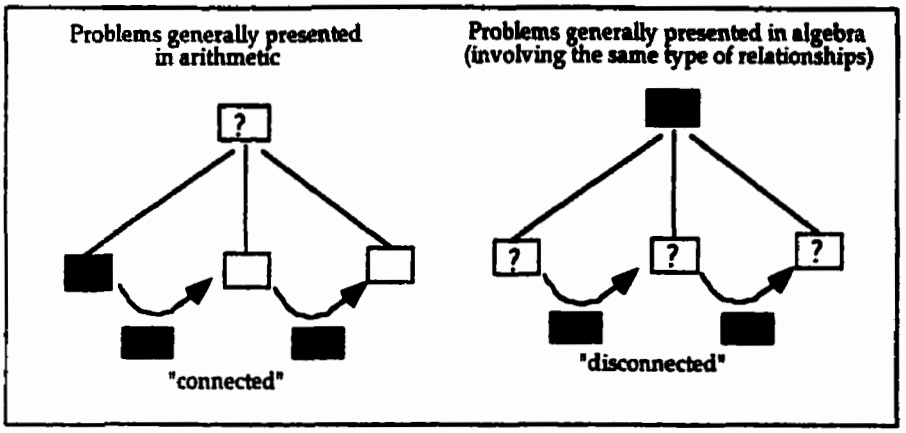


Figure 6.4 : Problème arithmétique vs algébrique

L'analyse des procédures de résolution utilisées par des élèves ne connaissant pas encore l'algèbre dans des problèmes dits *déconnectés* (généralement rencontrés en algèbre) leur a révélé que ces derniers tentent de rendre ces problèmes *connectés* en essayant de créer des liens entre les données pour être capables d'opérer sur elles à partir d'une donnée connue. Bednarz et Janvier ont regroupé les raisonnements utilisés par les élèves en quatre catégories.

Dans la première, on trouve les raisonnements qui prennent comme point de départ de la résolution l'état connu dans le problème («take the known state in the problem as the starting point»). L'élève cherche un état initial connu à partir duquel il peut générer les inconnues du problème et suit une procédure erronée.

Un deuxième type de raisonnement consiste à créer un état initial en utilisant un nombre fictif («create a starting state by using a fictional number»). On trouve ici les procédures du type « essais-erreurs ».

Un troisième type de raisonnement («share and then generate») est celui qui consiste à partager la quantité totale connue en autant de parts égales que le nombre d'inconnues constituant cette totalité, puis de générer à l'aide du nombre obtenu, les valeurs des inconnues. Bednarz et Janvier expliquent ce raisonnement ainsi :

> Others students create a known state, allowing them to generate the various relationships involved, by invoking a frequently used numeric strategy of equal sharing, which involves dividing the only known state of the problem (the whole) by the number of parts (composing this whole). The number thus obtained then serves as generator and for the reconstituting of the various unknowns quantities. (Bednarz et Janvier, 1996, p. 126)

Le quatrième et dernier type de raisonnement est d'un niveau plus élevé et consiste à se baser sur la structure du problème («take the structure into account»). À titre d'illustration de cette méthode, Bednarz et Janvier commentent la solution de l'élève Éléonore au problème (g) (Voir Tableau 6.3).

> Thus Éléonore, in problem (g) writes: 198 ÷ 9 = 22 (she seems to see 1 share, 2 shares and 6 shares).
> She thus obtains Denis' share and then figures out the two others :
> 22x2 = 44 (Georges)
> 44x3 = 132 (Pierre) (Bednarz and Janvier, 1996, p. 127)

Dans cette stratégie, Éléonore opère sur les relations entre les quantités et transforme complètement le problème initial en un problème plus global où il est possible de faire les calculs.

En utilisant aussi des entrevues d'élèves, Bednarz et Janvier ont identifié les obstacles suivants dans le passage des élèves d'un raisonnement arithmétique à un raisonnement algébrique:

> To directly generate using a single unknown is a process that appears to be extremely complex for these students. (...)
> Substitution, which requires the passage to a single unknown, appears to be equally difficult for the students. (...)
> For certain students, these difficulties are accompanied by a refusal to operate on the unknown. (...)
> The symbolism used to present the relationship in the equation creates difficulties for some students. (...) (Bednarz et Janvier, 1996, p. 134)

Les travaux de Bednarz et Janvier ont le mérite de mettre en évidence les difficultés qu'éprouvent les élèves dans le développement de la pensée algébrique, et tout particulièrement dans le développement de l'habileté à penser analytiquement, dans le cadre des approches didactiques de l'algèbre prenant appui sur l'arithmétique. Ces deux auteures semblent penser, elles aussi, que le passage d'un mode arithmétique à un mode

algébrique de résolution de problèmes, est lié au fait de raisonner analytiquement. Si l'on veut introduire l'algèbre dans le cadre de la résolution de problèmes, la porte d'entrée est alors l'initiation à la pensée analytique. Dans ce cas, les auteures suggèrent d'utiliser les problèmes dits *déconnectés* (figure 6.4), dont la structure ne permet pas l'établissement d'un lien direct entre deux données connues du problème. De tels problèmes incitent à opérer sur une quantité inconnue et donc à raisonner de manière analytique. De plus, ces travaux montrent que l'habileté à appréhender la structure de tels problèmes facilite la tendance à raisonner analytiquement.

Les recherches de Bednarz et Janvier ont été réalisées auprès d'élèves ayant déjà une bonne expérience en arithmétique. Un certain nombre d'études empiriques laissent penser qu'un long apprentissage de l'arithmétique peut faire obstacle à l'introduction de l'algèbre (Kieran, 1992) et notamment à raisonner de manière analytique. Nous pensons alors qu'il est peut être plus profitable d'initier les élèves à la pensée analytique à un âge plus précoce.

Pour sa part, Rojano présente aussi une approche basée sur la résolution de problèmes, mais avec le support d'un outil technologique (un tableur : *spreadsheet*). Pour elle, l'initiation à l'algèbre s'effectue en tentant de faire passer l'élève de l'utilisation de procédures «pré-algébriques» à l'utilisation de procédures algébriques dans la résolution de problèmes. Selon elle, les procédures pré-algébriques sont celles qui sont orientées de ce qui est connu à ce qui est inconnu, à l'opposé des procédures algébriques où l'on opère sur l'inconnue pour déterminer sa valeur. Pour Rojano, l'initiation à l'algèbre coïncide avec l'initiation à la pensée analytique. L'approche didactique qu'elle propose suppose que l'arithmétique est connue. De plus, elle postule 1) qu'il existe une coupure didactique le long de la ligne d'évolution de la pensée arithmétique de l'enfant à la pensée algébrique, et 2) qu'un environnement technologique peut être un bon support pour aider l'élève à formuler des généralisations mathématiques (Rojano, 1996).

Une idée plus précise de l'approche de Rojano ressort de l'examen de son expérimentation auprès d'élèves âgés de 10-11 ans n'ayant pas encore reçu un enseignement formel de l'algèbre. Les objectifs d'apprentissage visés pour le groupe expérimental sont à cet égard significatifs :

> Block1 : Function and inverse function
> Within this sequence pupils were introduced to the following spreadsheet and mathematical ideas : entering a rule; replicating a rule; function and inverse function; symbolising a general rule; decimal and negative numbers.
> Block 2 : Equivalent algebraic expressions
> Within this sequence pupils were introduced to the ideas of equivalent algebraic expressions (e.g.. *5n and 2n + 3n*).
> Block 3 : Word problems
> Within this sequence pupils were introduced to solving a word problem in a spreadsheet by representing the unknown with a spreadsheet cell, expressing the relationships within the problems in terms of this unknown, and varying the unknown to find a solution. (Rojano, 1996, p. 139)

Il apparaît alors clairement que le véritable début de l'algèbre consiste à initier les élèves à se familiariser avec quelques aspects du langage algébrique, une expression algébrique étant interprétée comme une relation fonctionnelle (*Block* 1 et *Block* 2). La résolution de problèmes (*Blok* 3) ne vient qu'après que l'élève ait été initié au langage algébrique et au logiciel informatique. Selon Rojano, il existe une relation dialectique entre deux composantes de la pensée algébrique, qui sont :

> [T]he development of operativity (purely syntactic component) and its use in modeling and solving problem situations (semantic component). One cannot speak of a significant evolution in one of these without a basis in the other.
> [...] These considerations lead to the contemplation of teaching proposals that do not just include different ways of introducing the student to algebraic thought, but also maintain it in constant evolution through the above mentioned components, such that the student can become a competent user of algebraic language. (Rojano, 1996, p. 145).

Nous partageons avec Rojano cette analyse, et nous croyons que le développement du langage algébrique doit constamment être un objectif et progresser dans le sens d'une plus grande formalisation et sophistication. À ce propos, l'histoire de l'algèbre révèle que la recherche d'une langue algébrique bien adaptée aux problèmes étudiés, aux

méthodes et aux techniques élaborées a été constante chez les algébristes. Avant même l'avènement de l'algèbre symbolique de Viète, on savait nommer la plupart des concepts algébriques et on avait développé un symbolisme – tel celui des tableaux utilisé par al-Samaw'al – pour que le calcul algébrique puisse être effectué et présenté convenablement. Et c'est là un fait que nous avons remarqué tout au long de notre revue de l'histoire de l'algèbre : plus celle-ci se développe, raffine ses méthodes, complexifie ses techniques et dégage plus clairement ses concepts, plus son langage se précise et s'enrichit et plus son symbolisme s'affirme. Loin de s'arrêter avec Viète ou Descartes, le développement du symbolisme s'est poursuivi parallèlement à celui de l'algèbre. L'algébriste cherche toujours un système de notation qui se prête facilement aux manipulations et dont la syntaxe renseigne sur la structure des problèmes étudiés.

Finalement, précisons que l'activité de résolution de problèmes est une caractéristique de l'activité mathématique en général. Le travail du mathématicien ne consiste-t-il pas justement à formuler et à résoudre des problèmes ? Pour nous, l'option de conduire l'apprentissage de l'algèbre dans le cadre de la résolution de problèmes est d'ordre méthodologique et non une approche didactique de l'algèbre.

6.4.1.3 La perspective fonctionnelle dans l'introduction de l'algèbre

Deux exemples d'une telle approche sont proposées dans l'ouvrage. Le premier est présenté par Kathleen Heid et le second par Carolyn Kieran et al. Les deux utilisent des moyens technologiques. Nous présenterons d'abord le projet *Computer Intensive Algebra* (C.I.A) de Heid et al., un véritable curriculum d'algèbre destiné à des débutants en algèbre et qui a déjà fait l'objet d'une expérimentation (Heid et al., 1994).

L'approche C.I.A se centre sur les concepts de *variable* et de *fonction* et met l'accent sur la *modélisation* de situations réalistes et sur l'utilisation continuelle de multiples représentations (numériques, graphiques, symboliques) des variables et relations d'une situation. D'ailleurs, dès le premier chapitre, toutes ces notions sont introduites.

Le concept de fonction est central dans cette approche, comme le montre le libellé des titres des chapitres qui forment le contenu à enseigner.

Chapter 1: Variables and Functions;
Chapter 2: Calculators, Computers, and Functions;
Chapter 3: Properties and Applications of Linear Functions;
Chapter 4: Quadratic Functions;
Chapter 5: Exponential Functions;
Chapter 6: Rational Functions;
Chapter 7: Algebraic Systems: Systems of Functions and Equations;
Chapter 8: Symbolic Reasoning: Equivalent Expressions;
Chapter 9: Symbolic Reasoning: Equations and Inequalities.
(Heid, 1996 ; p. 240)

Le concept de *variable* est introduit de manière informelle; d'abord comme une quantité dont on peut contrôler la valeur et qui affecte les résultats dans la simulation par ordinateur d'une situation réaliste, et ensuite comme une quantité spécifique telle la moyenne du poids des femmes américaines ou la distance parcourue dans une course[70].

Le concept de *fonction* est introduit comme une relation entre des variables numériques. La valeur d'une variable « input » (l'argument) détermine une valeur correspondante de la variable « output » (la variable dépendante). La plupart des fonctions rencontrées sont à une seule variable. Elles peuvent être représentées de trois manières différentes: des *tables*, des *graphes* et des *règles*. Les familles de fonctions linéaires, quadratiques, exponentielles et rationnelles sont étudiées car, précisent Heid et al., elles constituent des modèles raisonnables de situations réalistes. L'apprenant étudie ces familles de fonctions et leurs propriétés à travers des situations réalistes, analyse le sens de taux de variation de diverses fonctions, les maxima et minima ainsi que le comportement asymptotique de ces fonctions dans des situations réalistes.

Par ailleurs, Heid (1996) explique ce que signifie dans cette approche comprendre le concept de fonction:

> In this approach to algebra, understanding the concept of function requires being able to solve problems using multiple representations and to reason within and among graphical, numerical, and symbolic

[70] Exemples utilisés dans le manuel C.I.A.

> representations of function. It requires understanding properties of basic families of functions and how those properties can be seen in each of the different representations. It requires the ability to recognize function families and their properties within real world settings, as well as the ability to answer questions about those real settings using function families and their properties. (Heid, 1996, pp. 239-240)

Le C.I.A ne sollicite pas des élèves des manipulations d'expressions algébriques complexes, affirment les auteurs. Les élèves vont simplifier à la main quelques expressions en se basant sur les propriétés des équations, mais la pratique d'exercices sur la factorisation de trinômes ne fait pas partie du curriculum. Ceci reflète le fait, ajoutent les auteurs, que dans certains cas effectuer un calcul ou une manipulation à la main ou mentalement est plus efficace que l'utilisation d'un outil informatique.

Afin de mieux saisir les caractéristiques de cette approche, voici un aperçu du matériel produit par le projet C.I.A., basé sur la description qu'en fait Heid (1996).

Le premier chapitre introduit dès le départ les concepts de variable et de fonction à l'aide d'une situation réaliste simulée par ordinateur. Dans cette simulation, l'apprenant contrôle un certain nombre de valeurs *inputs* et, en faisant fonctionner la simulation, pour différentes combinaisons des valeurs des variables, il peut voir l'effet direct sur les valeurs des variables dépendantes (*outputs*). Le reste du chapitre vise à familiariser l'apprenant avec les représentations graphiques, numériques et symboliques de diverses fonctions à une seule variable.

Le second chapitre introduit à l'utilisation de l'ordinateur pour générer des tables et des graphes à partir de règles de fonctions. À l'aide de cette habileté l'apprenant s'entraîne à répondre à certaines questions du type:

> What are the function's output values or range of values for a specified input value or range of input values?
> For which input value(s) or range of values does the function attain specified output values or range of output values?
> For which input value(s) does the function attain the output value of 0?
> What are the trends in output values?
> For which input value(s) does the function attain a maximum or a minimum? (Heid, 1996, p. 241)

Les quatre chapitres qui suivent sont consacrés à l'étude des familles de fonctions, linéaires, quadratiques, exponentielles et rationnelles, respectivement, à partir de l'exploration de ces familles de fonctions et de leurs propriétés essentielles, souvent à partir de leurs règles symboliques ou en exploitant leurs représentations graphiques ou tabulaires. Ces fonctions sont rencontrées dans des situations réalistes. Quelquefois, l'apprenant doit lui-même trouver la règle d'une fonction en jeu dans une situation réaliste, à partir d'un ensemble de données numériques et en utilisant un logiciel d'ajustement de courbes («fitting curves program»). Il peut aussi explorer l'effet du changement de valeurs des paramètres d'une fonction sur les graphes et les tables de valeurs correspondants.

Dans des activités de synthèse, l'apprenant est engagé dans des activités de modélisation. Il doit cueillir des données, générer des règles de fonctions, comparer puis évaluer comment de "bonnes" fonctions choisies parmi différentes familles de fonctions permettent de modéliser la situation réaliste.

Bien que ces chapitres portent essentiellement sur l'étude de familles de fonctions à une variable, l'apprenant est appelé quelquefois à résoudre des systèmes d'équations ou d'inéquations pour répondre à des questions du type: pour quelles valeurs de x a-t-on: $f(x) = g(x)$? Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)<g(x)$? Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)>g(x)$?

Les chapitres 8 et 9 sont destinés à développer chez l'apprenant le sens du symbolisme («symbol sense»). Le chapitre 8 vise les objectifs suivants:

- developing graphical, numerical, contextual, and symbolic meaning for the concept of equivalent expressions;
- transforming functions rules into more familiar form;
- recognizing expressions that are not in familiar form; and
- getting different information of equivalent forms" (Heid, 1996, p. 245)

L'apprenant rencontre des expressions algébriques équivalentes lorsqu'il cherche à construire des représentations alternatives pour exprimer la relation fonctionnelle entre

deux variables. Il développe des techniques graphiques et numériques pour justifier l'équivalence ou la non-équivalence de plusieurs expressions algébriques. Cela l'amène par conséquent, estime Heid, à voir la nécessité d'établir des règles générales pour produire des expressions algébriques équivalentes. Ainsi, au lieu de les faire pratiquer longuement à appliquer les règles de manipulation du symbolisme algébrique pour produire des expressions algébriques équivalentes, le curriculum C.I.A amène les apprenants à bien comprendre pourquoi de telles règles sont nécessaires et ce que signifie graphiquement et numériquement l'équivalence d'expressions algébriques.

Il nécessite la disponibilité continuelle d'une calculatrice scientifique et d'un ordinateur muni de quatre logiciels:

Un tableur («Function tables program») : produisant des tableaux de valeurs de fonctions. Les élèves peuvent utiliser des tableurs s'ils sont familiarisés avec ce type de logiciels.

Un grapheur («Function graphing program»): permettant de tracer à la fois un ou plusieurs graphes de fonctions usuelles, de faire des changements d'échelle et de lire les coordonnées des points sur la courbe en y pointant le curseur.

Un logiciel d'ajustement de courbes («Curve fitting program»): permettant d'ajuster la règle d'une fonction à un ensemble de paires ordonnées de valeurs (input, output).

Un logiciel de calcul algébrique contenant un solveur («Computer algebra program»): permettant d'exécuter des manipulations algébriques, de simplifier des expressions algébriques et de résoudre des équations symboliquement.

L'approche didactique utilisée dans le projet C.I.A. est bien une approche «fonction», et accorde une certaine importance aux aspects modélisation et langage de l'algèbre. Selon les auteurs, les fonctions utilisées et étudiées le sont parce qu'elles sont des modèles

raisonnables de situations réalistes, y compris des fonctions qui ne sont pas de nature algébrique, comme les fonctions trigonométriques ou exponentielles.

Comme l'indique son titre même, le C.I.A. recourt d'une manière intensive à la calculatrice scientifique et au micro-ordinateur. Il ne propose pas un enseignement spécifique des manipulations algébriques à la main ne se justifie que dans le cas où elles sont nettement plus efficaces que l'utilisation de la calculatrice ou du micro-ordinateur. En revanche, les notions de fonction, de variable et de modélisation sont introduites dès le début du programme, alors que traditionnellement elles ne figuraient que très rarement dans les premiers moments d'apprentissage de l'algèbre.

Cette manière d'introduire l'algèbre, qui passe outre, avons-nous dit, à la nécessité d'une certaine maîtrise technique du calcul algébrique, n'est possible qu'avec l'utilisation de supports technologiques. Car l'algèbre étant fondamentalement dynamique, il n'y a pas véritablement d'algèbre sans une dynamique des opérations. Dans l'approche utilisée dans le C.I.A., une expression algébrique est interprétée comme la règle d'une relation fonctionnelle, autrement dit comme le modèle algébrique d'un système de relations entre des variables d'une certaine situation. À défaut des justifications syntaxiques, les justifications des transformations de ces expressions ne peuvent plus théoriquement être faites qu'avec l'aide de la sémantique de la situation, ou en recourant à un outil technologique. La première solution est didactiquement difficile au début de l'apprentissage de l'algèbre car elle nécessite des connaissances approfondies de la situation à modéliser (c'est l'inconvénient de toute approche utilisant la modélisation). Plus précisément, elle suppose que soit appréhendé le système de relations entre les variables ainsi que les transformations qu'il peut subir suite à une variation de l'une ou plusieurs de ces variables.

La seconde solution fait appel à différents outils informatiques pour justifier les transformations à partir d'une représentation tabulaire, graphique ou symbolique de la relation fonctionnelle. À ce niveau, en plus d'être le médium dans lequel se déroule

l'activité algébrique, l'ordinateur offre une panoplie d'outils, notamment pour calculer algébriquement. Les auteurs affirment que l'élève doit choisir l'outil adéquat pour résoudre la situation. Ces outils informatiques sont utilisés pour générer des heuristiques mais aussi pour venir supporter la théorie [71]. Ainsi par exemple, dans la section 6 du chapitre 1, l'ordre des opérations est introduit dans le contexte de la calculatrice. On explicite les règles de calcul sur la calculatrice: 1) exécuter les opérations à l'intérieur des parenthèses, 2) calculer les puissances, 3) calculer de droite à gauche les multiplications et divisions, 4) calculer de droite à gauche les additions et soustractions. Voici un autre exemple de l'utilisation du micro-ordinateur tiré de la section 4 du chapitre 1, dans laquelle l'élève est initié à représenter symboliquement une fonction. L'objectif de la leçon est de le rendre capable d'écrire la règle d'une fonction dans une forme symbolique à partir d'un tableau de valeurs de la fonction. Pour cela l'élève utilise le logiciel FINDING RULES TO RELATE VARIABLES qui possède 40 règles de fonctions simples (34 fonctions linéaires dont une fonction constante, 4 fonctions quadratiques, 2 fonctions linéaires en 1/n, une fonction exponentielle). L'ordinateur fournit un tableau de valeurs d'une fonction cachée que l'élève ne connaît pas. Ensuite, il propose une série de valeurs *inputs*, l'élève doit découvrir les *outputs* correspondants. À chaque essai de l'élève, l'ordinateur approuve par *Yes* ou désapprouve par *No* sa réponse. À partir d'un nombre fini de valeurs de la fonction, l'élève doit conjecturer la règle de la fonction [72].

À ce propos, nous voulons faire une mise en garde contre l'utilisation d'outils technologiques. En effet, par exemple, dans une activité de modélisation à l'aide de l'ordinateur, l'élève peut générer un tableau de valeur de la relation fonctionnelle modélisant la situation, représenter graphiquement ces valeurs, trouver à l'aide d'un logiciel d'ajustement de courbes le graphe d'une fonction possédant la même

---

[71] Dans ce sens, l'ordinateur joue, dans l'introduction de l'algèbre, un rôle heuristique analogue à celui de l'arithmétique dans la conception de l'algèbre comme *arithmétique généralisée*.

[72] À notre connaissance, il n'existe aucun moyen algébrique pour découvrir une fonction transcendante, comme la fonction exponentielle, à partir d'un nombre fini de ses valeurs. Il faut au moins ajouter la condition de continuité.

représentation tabulaire, et finalement découvrir une représentation littérale de la fonction à l'aide d'un autre logiciel. Dans une telle activité, l'élève doit proposer des valeurs numériques comme *inputs*, faire fonctionner des outils informatiques, et utiliser des raisonnements de type essais-erreurs, mais il ne semble pas contraint à raisonner de manière analytique.

Le second exemple d'une approche «fonctionnelle» donnée dans l'ouvrage est une proposition de Kieran et al. Il s'agit d'une introduction à l'algèbre dans l'environnement technologique CARAPACE (Contexte d'Aide à la Résolution Algorithmique de Problèmes Algébriques dans un Cadre Évolutif), un logiciel développé spécialement pour la résolution de problèmes basés sur des situations fonctionnelles. L'environnement CARAPACE utilise des représentations tabulaires, algorithmiques et graphiques. L'approche fonctionnelle de Kieran et al. a pour objectif d'initier les élèves au *langage algébrique*. Ce dernier est défini de la manière suivante:

> One can describe it [algebraic language] as the domain of general statements of algorithmic functional relationships based on arithmetic. Thus, when we say that "the cashier got the total price by adding the prices of all the articles," we are in the presence of a *statement* (whose formal symbolism goes beyond the secondary level) of the algebraic language. On the other hand, we consider that "the cashier got the total price by adding the prices of all the articles given the discount and applicable taxes" is not an algebraic statement because the arithmetic relationships that are involved are not sufficiently explicit. (Kieran et al., 1996, p. 278).

Dans une première étude, les auteurs ont utilisé l'environnement CARAPACE comme outil d'aide à la résolution de problèmes algébriques par essais successifs («guess-and-test»). Supposons, par exemple, le problème suivant :

> A town is inhabited with 256 434 people. Because of pollution, many people leave the town to live in the country. Each year the population decreases by 1 623 persons. In how many years will there be only 128217 people left in this town ? (Kieran et al., 1996, p. 262)

L'élève commence à le résoudre sur papier. Il choisit des valeurs numériques de l'argument («inputs») et calcule *à la main* les valeurs de la variable dépendante

(«outputs»). Par la suite, il passe à l'ordinateur qui se charge de calculer pour lui les valeurs de la variable dépendante. La figure suivante illustre les essais de l'élève ainsi que les valeurs de la variable dépendante générées par l'ordinateur (Kieran et al., 1996, p. 262):

INPUTS	OUTPUTS
Number of years	Remaining population
95	102249
98	97380
96	100626
94	103872
93	105495
89	111987
88	113610
86	116856
80	126594
79	128217

Figure 6.5. : Résolution par essais successifs

Kieran et al., s'appuyant sur une opinion de Fey, estiment que la présence de la technologie rend la stratégie par essais successifs plus attrayante parce que la phase de calcul des valeurs de la variable dépendante est considérablement plus courte et que les élèves ont l'occasion de lier la résolution de problèmes en algèbre avec leurs savoirs et leur expérience antérieurs en arithmétique. Ceci est fort compréhensible car la stratégie par essais successifs met en jeu des raisonnements synthétiques plutôt qu'analytiques comme c'est souvent le cas en algèbre. En effet, l'élève doit partir des données connues pour découvrir la valeur de l'inconnue; il n'opère jamais sur une inconnue.

Notons que le problème précédent est modélisable par la fonction affine $y=-1623\,x+256434$, où l'argument x représente des nombres entiers (nombre d'années) et la valeur dépendante y la population après x années. Le membre de droite de l'égalité peut être interprété comme un algorithme de calcul qui permet de générer des valeurs de la variable y étant donné des valeurs de la variable x. Lorsque l'élève effectue les calculs à la main, le processus de calcul qu'il utilise doit être théoriquement

équivalent à cet algorithme, sinon les calculs seront erronés. On peut alors supposer que l'élève a une certaine compréhension procédurale de l'algorithme, et donc de la relation fonctionnelle. En revanche, dans l'environnement CARAPACE, la formation des valeurs y se trouve complètement à la charge de l'ordinateur. L'élève n'a pas ainsi l'occasion d'être en contact avec la relation via sa représentation algorithmique. Sa tâche se réduit à chercher un invariant (la relation fonctionnelle) à partir d'une table de valeurs comme celle de la figure 6.5. L'élève peut arriver à trouver la solution sans avoir vraiment été en contact avec la forme de la relation entre les variables. Dans la situation donnée en exemple, l'élève choisit des valeurs numériques de *l'input* jusqu'à ce que la valeur de *l'output* générée par l'ordinateur coïncide avec la valeur témoin 128217. Le seul mérite de l'élève consiste à ajuster ses choix des valeurs *input* en fonction de la comparaison de la valeur *output* et de la valeur témoin. Métaphoriquement, la charge cognitive imposée à l'élève dans cette activité est analogue à celle dans une situation de la pesée du poids d'un objet avec une balance à deux plateaux. La tâche consiste à mettre l'objet à peser dans un premier plateau de la balance et à ajouter des tares dans le second plateau jusqu'à ce que le témoin de l'équilibre soit dans sa position verticale. Lorsque le peseur choisi une pesée, la mesure de l'angle formé par la position du témoin et la position d'équilibre (la verticale), indique, selon le cas, s'il s'agit d'un excès ou d'un manque. Le peseur diminue ou augmente alors le poids total de la pesée, selon le cas, d'une grandeur compatible avec la mesure de l'angle de pesée et de l'expérience qu'il a de ses essais antérieurs. A priori, la stratégie utilisée est la suivante : si lors d'une pesée, la flèche témoin pointe du côté du plateau contenant l'objet, diminuer le poids de la pesée; si, par contre, dans une pesée, la flèche témoin pointe du côté du plateau contenant les tares, augmenter le poids de la pesée. Kieran et al. ont, de leur côté, trouvé que les élèves utilisent des stratégies semblables, basées uniquement sur l'ordre des relations et la reconnaissance de régularités. Ils ont identifié les deux stratégies suivantes, qualifiées respectivement de croissance et de décroissance. La première est opérante quand les variables x et y varient dans le même sens, c'est-à-dire quand la

relation fonctionnelle qui les lie est une fonction croissante[73]. Elle peut être résumée ainsi :

> si le résultat est plus petit que celui désiré, augmenter la valeur d'essai;
> si le résultat est plus grand que celui désiré, diminuer la valeur d'essai.
> (Kieran et al., 1996, p.262, traduction libre)

La seconde stratégie est opérante quand la fonction est décroissante. Elle peut être résumée ainsi :

> si le résultat est plus petit que celui désiré, diminuer la valeur d'essai;
> si le résultat est plus grand que celui désiré, augmenter la valeur d'essai.
> (Kieran et al., 1996, p.263, traduction libre)

Cette métaphore est pertinente pour nous sensibiliser au fait que l'outil utilisé (la balance ou l'ordinateur) pour résoudre ce type de problèmes est un amplificateur cognitif très puissant, en ce sens qu'il permet d'augmenter la capacité à résoudre des problèmes, mais sans nécessiter un grand effort cognitif. Cela nous rappelle un principe général: la charge cognitive nécessaire pour la réalisation d'une tâche est inversement proportionnelle à la puissance de l'outil utilisé, étant entendu que ce dernier est approprié pour la réalisation d'une telle tâche. Bien qu'elle soit cognitivement simple, la stratégie par essais successifs, couplée avec la puissance calculatoire de l'ordinateur, s'avère être très efficace pour la résolution de tels problèmes; le recours à d'autres types de démarche semble alors être superflu pour les élèves.

Le genre d'activités dont nous venons de discuter peut aider l'élève à trouver certains types de régularités numériques, à approcher les concepts de variable et de variable dépendante, et surtout à augmenter sa capacité à résoudre certains types de problèmes. Ces notions sont certes importantes en algèbre, mais le genre d'activités proposées se situe davantage dans un registre arithmétique qu'algébrique.

---

[73] C'est le cas de la situation de pesée; interprétée comme une situation fonctionnelle, elle est modélisable par la fonction identité : $y = x$ qui est bien une fonction croissante.

Dans une deuxième étude, Kieran et al. ont tenté d'amener les élèves à représenter les relations fonctionnelles sous forme d'algorithmes de calcul. L'environnement CARAPACE utilise un langage s'approchant du langage naturel. Les seules opérations permises sont les quatre opérations arithmétiques en plus de l'exponentiation. Ce langage peut être enrichi à un niveau syntaxique plus élevé au fur et à mesure que l'apprentissage progresse. CARAPACE accepte les expressions usuelles de l'algèbre élémentaire telle que: $ax^2 + bx + c$ gives y, mais n'utilise pas encore le signe égalité.

L'apprenant est au départ confronté à une situation fonctionnelle, comme la suivante:

> Carine travaille à temps partiel au voisinage de sa demeure. Elle vend des abonnements à une revue. Elle gagne $20 par semaine, plus un bonus de $4 par abonnement vendu. (Kieran, 1996, p. 280, traduction libre)

La question «combien d'abonnements doit-elle vendre si elle veut atteindre le gain de $124 en une semaine ?» n'est pas posée tout de suite avec la situation, expliquent Kieran et al., pour que l'élève ne résolve pas le problème en effectuant les opérations inverses[74] ($\frac{124-20}{4}$), démarche typiquement arithmétique. Kieran et al. s'appuient à cet effet sur une remarque d'Usiskin :

> In solving problems such as "When 3 is added to 5 times a certain number, the sum is 40," many students have difficulty moving from arithmetic to algebra. Whereas the arithmetic solution involves subtracting 3 and dividing by 5 [i.e., using inverse operations], the algebraic form $5x + 3 = 40$ involves multiplication by 5 and addition of 3 [i.e., using forward operations]. That is, to set up the equation, you must think precisely the opposite of the way you would solve it using arithmetic. (Usiskin, 1988, p. 13; cité dans Kieran et al., 1996, p. 265-266)[75]

Pour aider l'élève à comprendre la situation, Kieran et al. lui demandent de répondre à des questions nécessitant des calculs numériques simples du type: «si Carine vend 5 abonnements par mois, quel serait son profit ?».

---

[74] Inverses au sens où elles apparaissent dans le texte de la situation problème.

[75] Les précisions à l'intérieures des parenthèses sont ajoutées par Kieran et al.

En élaborant un programme (suite d'instructions) dans CARAPACE pour représenter l'algorithme de calcul, l'élève est poussé à représenter les opérations dans le même ordre qu'elles figurent dans l'énoncé du problème, et donc il se trouve forcé de raisonner d'une manière analytique. La figure 6.6 montre la production d'un élève (Kieran et al., p. 259). Dès la première ligne de son programme, l'élève représente l'inconnue par l'expression *Number of subscriptions* et plus bas il opère sur cette inconnue.

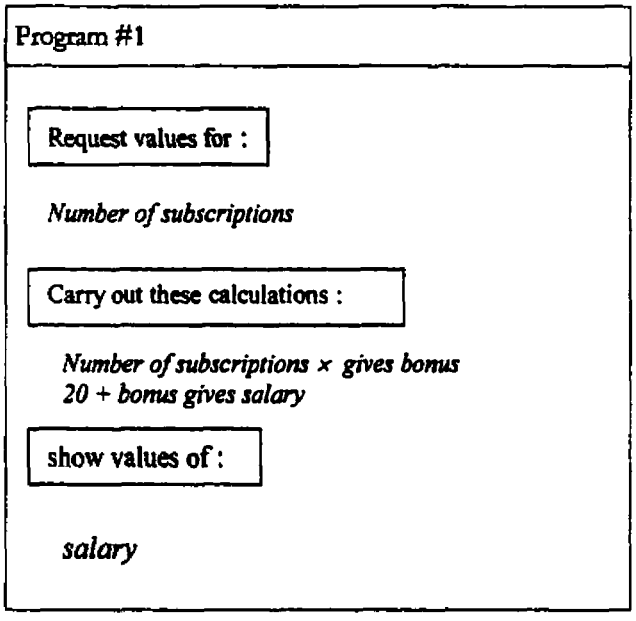


Figure 6.6 : Programme élaboré par un élève avec CARAPACE

Selon Kieran et al., les élèves ne semblent pas trouver de difficultés dans de telles activités même quand l'équation modélisant la situation contient l'inconnue dans les deux membres de l'équation (e.g. : $ax = b + cx; ax \pm b = cx \pm d$)[76]; de plus, ils peuvent interpréter, selon le contexte, une lettre ou des mots, comme variable ou comme une inconnue.

[76] Selon Filloy et Rojano (1984), les problèmes dont la résolution se ramène à ce type d'équation marquent une coupure didactique car, n'étant pas résolubles facilement par l'arithmétique, ils nécessitent d'opérer sur l'inconnue.

Une activité de ce genre nous apparaît tout à fait pertinente dans l'introduction de l'algèbre. En effet, il est indéniable qu'elle peut aider l'élève à s'initier à la pensée analytique, ce qui nous paraît souhaitable dès le début de l'apprentissage de l'algèbre.

Dans une troisième étude, Kieran et al. ont tenté de faire passer les élèves de représentations algorithmiques à des représentations algébriques plus standard de relations fonctionnelles:

> [...] students [are] attempted to make the transition from the procedural representation of CRAPACE to the more traditional forms of algebraic notation for equation (but without the equal sign) and to deal with the associated use of parentheses, order of operations, shortening of variables names, and the conventions for implicit multiplication. (Kieran et al., 1996, p. 265-266)

Une étude de Luckow (1993), dans le cadre du même programme de recherche, a révélé que les élèves ne semblent pas avoir de problèmes à utiliser une lettre pour remplacer une phrase par des mots, ou utiliser des parenthèses pour grouper une expression, ou encore à omettre l'écriture du signe de multiplication (*ibid.*). En revanche, rapportent Kieran et al., les élèves ont éprouvé des difficultés à utiliser la même variable plus d'une fois sur une même ligne. Par exemple :

> In condensing the following two-line program :
> Price of pen × 3 gives price of watch
> Price of pen + price of watch gives total cost
> Into a one-line program :
> price of pen + (price of pen × 3) gives total cost
> the students had the tendency to suggest :
> (price of pen × 3) + price of watch gives total cost
> in order to avoid having the same variable mentioned twice on the same line. Which looked incorrect to them (Kieran et al., 1996, p. 266)

Ils ont également eu des difficultés à remplacer une variable (ou une expression représentant une variable) par une variable équivalente plus d'une fois dans la représentation algorithmique d'une relation fonctionnelle. Par exemple, pour réduire le nombre de lignes d'un programme du genre :

$x + 80$ gives y
$y/6$ gives z
$x + z$ gives a

$y - z$ gives b

l'élève écrit :

$(x + 80)/6$ gives z
$x + z$ gives a
$y - z$ gives b

semblant incapable de remplacer y par $(x+80)$ partout où y apparaît. Mais la *simplification* a été la difficulté la plus importante rencontrée par les élèves et identifiée par Luckow. Les élèves semblaient incapables d'utiliser spontanément quelques transformations syntaxiques pour simplifier la représentation algorithmique d'une relation entre des variables d'un problème à contexte. Kieran et al. donnent l'exemple suivant :

> For example, the problem :
> A group of girl guides went on a 3-day bicycle trip which covered a total distance of 256 km. On the second day, they covered 23 km more than the first day. On the third day, they did 30 km less that the second day. How many km did they cycle on the first day ?
> led to functional algorithm such as:
> $x + (x + 23) + ((x + 23) - 30)$ gives T.
> When asked if they could write this in a shorter way, they removed the parentheses. But said that they could not abbreviate it any further. Yet a follow-up interview involving similar expressions in a non-contextualized setting that reminded them of the algebra they were doing in class suggested that they could simplify further, as long as the expression was not tied to a particular context. (Kieran et al., 1996, p. 267)

Ces auteurs avancent que la *simplification* requiert l'abandon de la signification contextuelle de l'expression, chose que les élèves ne semblent pas encore capables de réaliser. Nous avons déjà souligné ce type de difficulté lorsque nous avons parlé de l'habileté à manipuler des expressions algébriques (3.3.3): lorsqu'on manipule une expression algébrique, l'attention doit être portée uniquement sur les règles du calcul algébrique que l'on applique, indépendamment de la signification des variables et des opérations en jeu. (Ainsi, dans le problème ci-dessus, il faut arriver à oublier que x représente «le nombre de kilomètres parcouru le premier jour» pendant que l'on transforme les expressions algébriques.)

Dans une quatrième étude, Kieran et al. se sont intéressés à l'utilisation des représentations graphiques comme outil de résolution de problèmes. L'environnement

CARAPACE permet de représenter dans un repère cartésien les points dont les coordonnées sont formées des *inputs* et des *outputs* d'une relation fonctionnelle. L'élève a la possibilité de changer d'échelle ou de faire un «zoom» et de visualiser l'effet produit sur le graphe initial. Kieran et al. ont conclu notamment que la représentation graphique est plus efficace que la représentation tabulaire dans le cas où il s'agit de trouver de multiples solutions de relations fonctionnelles non linéaires.

Dans une cinquième étude, Kieran et al. ont identifié plusieurs difficultés rencontrées pas les élèves dans des activités où il s'agit de produire, modifier ou interpréter des graphes. Ils ont observé qu'au début les élèves n'établissaient pas de liens entre la représentation graphique et la représentation algorithmique de relations fonctionnelles. De même, ils n'ont pas immédiatement utilisé la stratégie d'approximations successives comme ils l'avaient fait dans le contexte numérique. Ces auteurs ont aussi noté la tendance des élèves à se baser sur l'apparence du graphe et à extrapoler à partir de ce qui est visible. Comme dans le cas des représentations tabulaires, les élèves utilisent des stratégies de résolution de problèmes en se basant uniquement sur l'ordre des relations et la reconnaissance de régularités. Ce qui pousse Kieran et al. à affirmer : «It seemed that when the student moved from the explicit computational representation to another in which the computations were less explicit, they had a tendency initially to generate other testing mechanisms.» (Kieran et al., 1996, p. 276).

Kieran et al. ont mené une sixième étude à propos des difficultés des élèves à agir syntaxiquement sur des expressions algébriques ayant une connotation sémantique. Ils rapportent l'exemple de Kim, un élève de 14 ans, non encore initié au langage formel algébrique :

> He was asked to enter the program "3(x+5) gives k" and to try to create another program without parentheses that would give the same graph. He thought for a while and then began to write down a table of values (with inputs of 0, 1, 2, 3). He calculated the differences between successive output values and thus was able to come up with the program "15 + x × 3 gives k". When asked by the interviewer if he could go directly from "3(x+5)" to "15 + x × 3," he said he could not. (Kieran et al , 1996. p. 273)

Et les auteurs de conclure :

> This example suggests quite dramatically that students who have not yet learned to carry out some basic symbol manipulation might be hampered in their explorations of alternate forms of expressions and in their attempts to generate equivalent expressions of a function. (*ibid.*)

En conclusion, dans l'ensemble des travaux, Kieran et al. proposent une approche «fonction» de l'algèbre en tentant d'y intégrer l'approche «langage». Le fait d'initier les élèves à une forme du langage algébrique s'approchant du langage naturel nous apparaît une idée pertinente. Toutefois, cette approche met surtout l'accent sur le rôle représentatif et descriptif du langage et pas assez sur son rôle transformant et générateur:

> We think that the activities involving the translation of functional situations into algebraic language, followed by numeric and graphical analysis, can be an interesting candidate for minimal algebraic knowledge. When one thinks about it, the knowledge and abilities thus acquired constitute an acceptable base for the majority of personal and professional needs. The practice of symbolic manipulation techniques could be left to students who are more specifically interested in a scientific career, it being understood that the potential role of computer symbolic manipulation systems needs also to be taken into consideration. (p. 292)

À notre avis, ne pas entraîner les élèves à la manipulation d'expressions algébriques au tout début de l'apprentissage de l'algèbre (surtout lorsqu'il a lieu tôt dans le cursus scolaire) peut être compréhensible, mais il arrive un moment où les élèves doivent, au minimum, savoir réaliser un calcul algébrique dans des cas simples (par exemple : simplifier l'expressions algébrique : $1 + x + 2 - x = 3$) sans recourir à un outil technologique. On comprend que la maîtrise du calcul algébrique n'est pas facile à réaliser par les élèves, mais elle reste un aspect important de l'algèbre qu'il faut considérer sérieusement.

Par ailleurs, comme nous l'avons souligné précédemment, une utilisation intensive d'outils technologiques dans des activités de résolution de problèmes n'incite pas les élèves à raisonner de manière analytique; et, par conséquent, elle ne favorise pas le

développement de la pensée analytique, une composante essentielle de la pensée algébrique.

Même s'ils favorisent une approche basée sur le concept de fonction, Kieran et al. soulignent la multiplicité des aspects de l'algèbre :

> [A]lgebra is more than a tool with which to solve problems – it is a notation, a set of transformations, a way of mathematizing situations, ... But algebra is again more than all of this, for its notations hide underlying concepts, such as unknown, variable, function, equation and so on. Thus, introducing algebra in a function-oriented, problem-solving environment provides students with only part of the picture of algebra. (Kieran et al., 1996, pp.277-278)

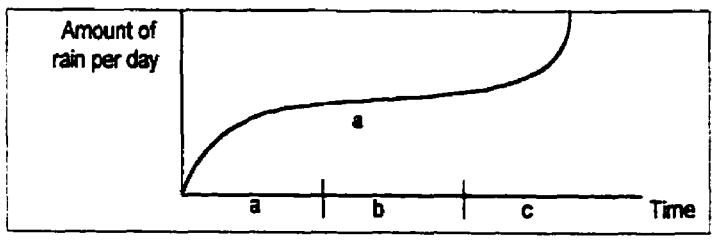
6.4.1.4 La perspective «modélisation» dans l'introduction de l'algèbre

Toujours dans le même l'ouvrage collectif, Nemirovski propose une approche basée sur la notion de *récit mathématique*, laquelle serait, selon lui, au cœur de la modélisation mathématique. Le mot *récit* est ici entendu au sens de Labov :

> We define narrative as one method of recapitulating past experiences by matching a verbal sequence of clauses to the sequence of events which (it is inferred) actually occurred. (Labov, 1972, p. 359; cite dans Nemirovski, 1996, p. 198)

Un récit mathématique est alors, selon Nemirovski, un *récit articulé avec des symboles mathématiques* (*ibid*). Il en donne l'exemple suivant :

> (a) First it rained more and more and it started to become steady (pointing to piece a of Graph1).
> (b) then it rained steadily (making piece b of Graph 1)
> (c) then it rained more and more (pointing to piece c of Graph 1)
> (Nemirovski, 1996, p. 199)



Graph 1

Sans être une chronologie, un récit est une suite d'épisodes ordonnés temporellement, scindant ainsi l'événement à «raconter». Ainsi, dans l'exemple précédent, trois épisodes forment le récit. Selon Nemirovski, de telles activités *construction de récits mathématiques* sont pertinentes dans l'introduction de l'algèbre, parce qu'elles initient les élèves à la généralisation mathématique. Se demandant quel rapport elles ont avec l'algèbre, il affirme :

> If we frame our understanding of the nature of algebra by the dialectic between mathematical generalization and specialization (Mason, 1996), it becomes clear that early algebra must have its roots in the experiential domains that children bring to the meaningful encounter with mathematical generalization. It is through the construction of mathematical narratives – our interpretation of *modeling* – that children's experiences with change, that is, with the different ways change occurs, become the subject of mathematical generalization. (Nemirovski, 1996, p. 217)

En conclusion, l'idée de construction de récits mathématiques est intéressante pour initier les élèves à la modélisation algébrique. L'approche proposée par Nemirovski reste toutefois limitée en ce qui concerne les autres aspects importants de l'algèbre.

6.4.2 Une approche proposée par Yves Chevallard

S'intéressant à la problématique du passage de l'arithmétique à l'algèbre au collège en France[77] (Chevallard, 1985, 1989, 1990), Chevallard formule le problème de la manière suivante :

> est-il possible de définir un *état du système d'enseignement* (c'est-à-dire un *curriculum*) qui détermine un rapport officiel à l'algébrique plus *idoine* aux tâches auxquelles l'algébrique sera employé notamment au lycée ? (Chevallard, 1989, p. 49)

Autrement dit, Chevallard cherche à déterminer un curriculum d'algèbre qui permettrait à l'élève de maîtriser le langage algébrique formel d'une manière fonctionnelle. Il fixe alors les deux objectifs suivants pour l'enseignement de l'algèbre au collège:

---

[77] Le collège en France correspond à la période scolaire s'étalant de la sixième année primaire à la deuxième année secondaire dans le système québécois, ou de la sixième à la neuvième années de l'enseignement fondamental marocain.

> **Premier objectif**, cet enseignement doit assurer un maniement *formel* satisfaisant du calcul algébrique, soit, dans sa version la plus développée, du calcul dans le corps R(x) des fractions rationnelles — objectif spécialement important pour les élèves qui poursuivront leurs études au-delà du collège. (Chevallard, 1989, p.52)

Il tient à préciser que la maîtrise formelle du calcul algébrique n'est en rien synonyme d'un enseignement «formel» ou «formaliste» du calcul algébrique. Il ajoute que ce dernier ne peut s'accomplir que par le moyen d'extensions successives des systèmes de nombres, ce qui l'amène à préciser le second objectif :

> La maîtrise de la dialectique entre maniement formel du calcul algébrique (..) et connaissance des systèmes de nombres constitue alors un **second objectif** de l'enseignement de l'algèbre au collège. Cet objectif dérive d'une double observation : il ne peut y avoir maîtrise du calcul algébrique fonctionnel sans que l'on fasse droit aux emplois du calcul algébrique sans que s'instaure une dialectique entre numérique et algébrique. (Chevallard, 1989, pp. 52-53)

Chevallard trouve alors en la *modélisation*, la notion-clé pour assurer le développement par l'élève d'une *maîtrise formelle du calcul fonctionnel* (*ibid.*). Il avance que ce processus est récurrent:

> [..] tout objet mathématique est le fruit d'une modélisation (éventuellement intramathématique). Cet objet mathématique peut à son tour être pris pour mathématisé dans une étude de niveau supérieur, appelant d'autres outils d'étude. On aboutit ainsi à une succession de modélisations et à une suite de modèles. (Chevallard, 1989, p. 57)

Il ajoute plus loin:

> La fonctionnalité du calcul algébrique qu'une perspective de renouvellement curriculaire doit viser suppose ainsi, précocement, l'emploi de *paramètres*, suscite la réappropriation de la notion de *formule* (en mettant en avant autant leur production que leur mise en œuvre); et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant avec la notion de *fonction*. (Chevallard, 1989, pp. 65-66)

Finalement, l'approche que Chevallard entend promouvoir pour l'enseignement de l'algèbre au collège tient compte d'un ensemble d'options curriculaires, notamment les suivantes: l'enseignement de l'algèbre doit se baser sur l'arithmétique; l'introduction du calcul algébrique formel doit se faire de manière dialectique avec les extensions successives des systèmes de nombres; la modélisation algébrique doit être utilisée

comme outil méthodologique pour développer le calcul algébrique formel lui-même et pour employer le calcul algébrique pour l'étude d'objets mathématiques ou non – ce qui garantit, pense Chevallard, que la maîtrise du calcul formel sera fonctionnelle; la pratique de la modélisation appelle à s'intéresser assez tôt à l'apprentissage des concepts de *paramètre* et de *fonction*.

Il apparaît donc que l'approche de Chevallard entend combiner à la fois les approches «langage», «modélisation» et «structures». L'idée est, d'une part, de construire les espaces de calcul algébrique liés aux systèmes de nombres de manière progressive selon l'extension des systèmes de nombres et, d'autre part, d'utiliser la modélisation algébrique afin que la maîtrise du calcul algébrique soit fonctionnelle.

L'élargissement de la notion de modélisation chez Chevallard (voir à ce sujet la section 3.3.2), sa caractéristique d'être un processus récurrent et le fait que la relation entre système et modèle soit réversible, permettent d'envisager la modélisation comme un moyen pour traiter l'algèbre à la fois comme objet et comme outil d'étude. Ainsi élargie, l'utilisation de la modélisation mathématique comme *leitmotiv* du curriculum permet d'envisager un curriculum d'algèbre intégré à d'autres branches mathématiques, voire même à d'autres disciplines scolaires. Par exemple, un système de deux équations du premier degré à deux inconnues peut être modélisé par deux droites du plan; il vient alors que ce système possède une solution, une infinité de solutions ou aucune solution selon que les droites sont sécantes, en un point, confondues ou parallèles disjointes, respectivement. À l'inverse, à partir des équations des deux droites, on peut établir algébriquement ces résultats géométriques.

La principale difficulté dans l'activité de modélisation est qu'il faut disposer de connaissances du modèle modélisant le système à l'étude pour pouvoir transférer certaines de ses connaissances à ce système.

Selon Chevallard, pour que son approche soit possible:

> En chaque point du curriculum, il convient de faire en sorte que l'outil dominant dont l'apprentissage est visé (le calcul algébrique ici) soit coprésent aux outils dont la disponibilité est nécessaire pour mener à bien une étude significative. C'est poser là un problème d'écologie didactique des objets de savoir qui se révèle être d'une extrême difficulté. (Chevallard, 1990, p. 31)

La principale nouveauté dans l'approche proposée par Chevallard est de nature méthodologique et consiste à utiliser la modélisation mathématique comme moyen pour développer le curriculum de mathématiques. Pour lui, l'apprentissage du langage algébrique demeure le principal objectif de l'apprentissage de l'algèbre et le contenu algébrique à enseigner reste globalement inchangé. De plus, à notre connaissance, Chevallard ne parle jamais de pensée algébrique.

6.4.3 L'approche multi-intégrée proposée par James Kaput

Dans la section 3.5.3 nous avons déjà parlé de cette approche et montré que notre modèle théorique M.I.A.P.A tient compte des divers aspects de l'algèbre et de la pensée algébrique sur lesquels elle se trouve basée. Rappelons que dans sa proposition, Kaput insiste sur l'importance de prendre en considération cinq aspects de l'algèbre—ou cinq formes intereliées de raisonnement algébrique, comme il l'a écrit plus tard (Kaput, 1998) :

> • [Kernel] Algebra as Generalizing and Formalizing Patterns and Constraints, especially, but not exclusively Algebra as Generalized Arithmetic Reasoning and Algebra as Generalized Quantitative Reasoning
> • [Kernel] Algebra as Syntactically Guided Manipulation of (opaque) Formalisms
> • [Mathematical Topic] Algebra as the Study of Structures Abstracted from Computations and Relations
> • [Mathematical Topic] Algebra as the study of Functions, Relations and Joint Variation
> • Algebra as a Cluster of Modeling Languages and Phenomena-Controlling languages (Kaput, 1995).

Il apparaît ainsi clairement, selon notre terminologie, que Kaput décrit ici une approche «mixte» de l'algèbre, intégrant les approches «dangage», «structures», «fonction» et

«modélisation». De plus, dans sa proposition, se trouvent mentionnées quelques composantes de la pensée algébrique.

Un élément intéressant à souligner dans le travail de Kaput est qu'il utilise des activités de simulation assistées par ordinateur de phénomènes physiques tel que le mouvement d'un mobile, activités qui amènent les élèves à construire des modèles algébriques de phénomènes physiques et à tester leur validité

La proposition de Kaput semble proche de la nôtre, bien que le cadre conceptuel sur lequel elle s'appuie soit différent du nôtre. En premier lieu, Kaput ne semble pas encore faire une distinction claire entre l'algèbre et la pensée algébrique ; il parle tantôt de cinq aspects de l'algèbre et tantôt de cinq formes de raisonnement algébrique.

En deuxième lieu, Kaput ne dégage pas suffisamment les composantes essentielles de la pensée algébrique. Par exemple, il ne souligne pas le rôle de la pensée analytique en algèbre, pourtant très important.

En troisième lieu, le sens de certains des termes qu'il utilise n'est pas bien délimité. Par exemple, lorsqu'il parle de l'algèbre comme étude de fonctions, de relations et de variation, il ne précise pas de quel type de fonctions il s'agit. (Rappelons que dans la section 3.3.1.2 nous avons pris position à ce sujet.)

6.4.4 Propositions du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

Le NCTM[78] fait partie des principaux acteurs qui participent à l'effort de reconceptualisation de l'algèbre enseignée à l'école. Depuis la fin des années 1980, cette importante association a organisé divers congrès et forums de discussion sur l'algèbre scolaire et mis sur pied le groupe de travail «Algebra Working Group» (AWG) chargé

[78] Le NCTM est la plus importante association d'enseignants des mathématiques en Amérique du Nord.

spécifiquement de présenter une nouvelle vision de l'algèbre scolaire. Nous commencerons par présenter et discuter la proposition de ce groupe, puis nous examinerons ce que le document «Principles and Standards for School Mathematics» de 2000 propose pour l'enseignement de l'algèbre.

6.4.4.1 Une approche multi-intégrée proposée par le groupe AWG

Dans la section 3.5.2 nous avons comparé la proposition de ce groupe à notre modèle M.I.A.P.A. Comme l'illustre la figure 3.7, l'approche didactique de l'algèbre proposée par ce groupe est une approche «mixte», puisqu'elle entend intégrer les approches «langage», «modélisation», «fonction» et «structures».

Le groupe propose de construire la compréhension de concepts chez l'élève à travers des activités touchants des thèmes d'étude similaires à ceux utilisés dans *On the shoulders of giants* (NRC[79], 1990), à savoir: *accroissement et changement*[80]; *grandeur et forme*[81]; *données et incertitude*[82]; *nombre*; et, *régularités*[83]. Selon les auteurs, cette collection de thèmes fournit l'occasion aux élèves d'établir des connections entre l'algèbre et d'autres disciplines, et de voir comment l'algèbre peut aider à donner du sens à des modèles et régularités dans des domaines aussi variés que la biologie et l'économie. Par exemple, l'étude de l'accroissement de la population est un contexte en rapport avec le thème *accroissement et changement*; trouver le nombre d'autobus pour le transport d'un grand groupe de personnes est un contexte relié au thème *nombre*; décider comment établir une formule pour classer les athlètes d'une discipline sportive donnée est un contexte se rapportant au thème *données*. Naturellement, ces thèmes d'étude ne sont pas disjoints, ils aident l'élève à comprendre son monde environnant et interagir avec lui Pour un même thème d'étude, le contexte peut être une application, un problème mathématique intéressant, voire un contexte culturel ou historique. Nous trouvons intéressante l'idée

---

[79] National Research Council
[80] Growth and change
[81] Size and shape
[82] Data and uncertainty
[83] Patterns

d'organiser le curriculum d'algèbre autour d'un petit nombre de thèmes importants. Nous y reviendrons dans le prochain chapitre.

6.4.4.2 L'algèbre dans les «Principles and Standards for School Mathematics» de 2000, du NCTM

Les «Principles and Standards for School Mathematics» de 2000 que le NCTM rendra publics en avril 2000 s'inscrivent dans la continuité des «Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics» précédents (NCTM, 1989), mais avec quelques changements, dont l'un des plus significatifs est la proposition de *dix* standards s'appliquant à *toutes* les classes du cursus scolaire du préscolaire à la douzième année. En effet, soulignent les auteurs des nouveaux standards du NCTM[84] :

> A significant change between the Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM 1989) and this draft of *Principles and Standards* is that there are ten standards, and each applies across the pre-K-12 grade span. Within each standard, a small number of focus areas is identified. (NCTM, 1998, p. 46)

Ces dix standards, sont scindés en deux parties:

> Five standards describe the mathematical content that students should learn :
>
> Number and Operations
> Patterns, Functions, and Algebra
> Geometry and Spatial Sense
> Measurement
> Data Analysis, Statistics, and Probability
>
> Five standards describe the mathematical processes through which students should acquire and use their mathematical knowledge:
> Problem Solving
> Reasoning and Proof
> Communication
> Connections
> Representation
> (NCTM, 1998, p. 46)

Chacun des dix standards est explicité au moyen de deux à quatre objectifs généraux, qui sont par la suite détaillés pour chacun des quatre niveaux : préscolaire à 2e année, 3e à 5e année, 5e à 8e année et, 9e à 12e année. Par exemple, le standard «Patterns,

Functions, and Algebra», qui nous intéresse tout particulièrement et que nous allons analyser plus loin, est précisé ainsi :

> Mathematical instructional programs should include attention to patterns, functions, symbols, and models so that all students—
> - understand various types of patterns and functional relationships;
> - use symbolic forms to represent and analyze mathematical situations and structures;
> - use mathematical models and analyze change in both real and abstract contexts.
>
> (NCTM, 1998, p. 56)

Le choix des mêmes standards pour tous les niveaux du cursus scolaire, depuis le préscolaire jusqu'à la douzième année, a de quoi séduire. En effet, il semble apporter une certaine cohérence longitudinale aux curriculums des mathématiques en question. Il permet, notamment, une meilleure compréhension des transitions d'un niveau d'étude au suivant. Cependant, il a occasionné un certain nombre de contraintes. Par exemple, il a fallu élargir l'interprétation à donner à certains standards de contenu mathématique de façon qu'ils puissent s'appliquer du préscolaire à la douzième année. Ainsi, il a fallu «prolonger vers le haut» le standard «Number and Operation». En effet, dans le document de 1989, il ne s'appliquait que de la maternelle à la huitième année, tandis que dans le rapport d'avril 2000, il est applicable du préscolaire à la douzième année. De même, il a fallu «prolonger vers le bas» le standard «Algebra» qui, dans le document de 1989 ne s'appliquait qu'à partir de la cinquième année. Dans le document d'avril 2000, il a fait place au standard «Patterns, Functions, and Algebra», qui apparaît maintenant du préscolaire à la douzième année.

Il est alors intéressant de se demander comment cette réorganisation des standards a eu des répercussions en ce qui concerne l'algèbre. Existe-t-il une différence significative entre la vison de l'algèbre des *Standards* de 1989 et celle des *Principles and Standards* de 2000 ?

Relatons un fait remarquable qui témoigne, nous semble-t-il, de la difficulté des auteurs des *Principles and Standards* de 2000 à se mettre d'accord sur la signification de l'algèbre :

le mot *algèbre* ne figure pas seul dans le titre du standard correspondant, il se trouve accompagné des mots *patterns* et *fonctions*. Ce qui laisserait entendre que l'étude des patterns et des fonctions ne fait pas partie intégrante de l'algèbre ! On peut comprendre que les auteurs veulent insinuer que dans ce standard se trouve inclus même l'étude des patterns et fonctions de nature non algébrique[85]. Mais ce moyen permet aussi, nous semble-t-il, d'éviter le débat à savoir s'il faut oui ou non inclure les *patterns* et les *fonctions* en algèbre. En outre, le titre même de ce standard laisse entrevoir la manière dont il a été conceptualisé, à savoir comme la fusions des deux anciens standards «Algebra» et «Patterns and Functions».

En effet, dans les *Standards* de 1989, le terme «algebra» n'est pas associé aux termes «*patterns*» et «*fonctions*» («Algebra» est un standard pour les niveaux 6e à 8e année et 9e à 12e année, «Patterns and Relationships» est un standard pour le niveau maternelle à 2e année et 3e à 5e année, il est remplacé par le standard «Patterns and Functions» dans le niveau 6e à 8e année, qui est lui-même remplacé par le standard «Functions» dans le niveau 9e à 12e année, le mot «patterns» ayant disparu.). En ce qui concerne l'algèbre, des *Standards* de 1989 aux *Principles and Standards* de 2000, il y a donc eu une extension polysémique du signifiant.

Examinons maintenant comment le standard «Patterns, Functions, and Algebra» des *Principles and Standards* de 2000 est explicité à travers les différents niveaux d'étude.

L'étude des patrons, des fonctions et de l'algèbre doit, estiment les auteurs, commencer de manière informelle dès la maternelle et progresser en se sophistiquant et en s'approfondissant tout au long du cursus.

Pour le niveau préscolaire à 2e année, le standard «Patterns, Functions and Algebra» est explicité ainsi :

---

[85] Comme par exemple les patterns du type : ABBABBABB...

Understand various types of patterns and functional relationships
In grades pre-K-2, all students should-

- sort and classify objects by different properties;
- order objects by size or other numerical property (seriation);
- identify, analyze, and extend patterns and recognize the same pattern in different manifestations;
- describe how both repeating and growing patterns are generated.

Use symbolic forms to represent and analyze mathematical situations and structures
In grades pre-K-2, all students should-

- illustrate general principles (e.g., commutativity) using specific numbers;
- understand reversal of operation;
- use concrete, pictorial, and verbal representations of numerical situations, including invented notation;
- use appropriate symbolic representation of mathematical situations.

Use mathematical models and analyze change in both real and abstract contexts
In grades pre-K-2, all students should-

- make comparisons and describe change qualitatively (e.g., taller than);
- make comparisons and describe change quantitatively (e.g., 3 inches taller);
- model concrete situations using addition and subtraction of whole numbers.

(NCTM, 1998, p. 117)

Il apparaît que les auteurs des *Principles and Standards* de 2000 considèrent la période allant du préscolaire à la deuxième année comme une phase préliminaire d'exploration de concepts algébriques et de développement d'un langage pour représenter et décrire des généralités (règles, régularités, etc.). Dans un tel cas, l'enseignant doit être capable de reconnaître les savoirs et savoir-faire algébriques (comme la propriété d'une opération) que les élèves appliquent et de les amener à en être conscients.

> When children break apart numbers and rearrange them (such as adding 8 + 5 and thinking '8 + 2 is 10 and 3 more is 13'), they are applying the associative property of addition. While it is not essential to introduce vocabulary such as 'commutativity' or 'associativity' at this age, it is important for the teacher to be aware of the algebraic properties used by

> the children and to help students develop an awareness of what they are doing. (p. 119).

Pour le niveau 3e à 5e année, le standard «Patterns, Functions and Algebra» est explicité ainsi :

> **Understand various types of patterns and functional relationships**
> In grades 3-5, all students should-
> - identify, describe, and extend geometric and numeric patterns including growing and shrinking patterns;
> - represent and record patterns using tools such as tables and graphs;
> - identify and describe relationships between two quantities that vary together (e.g., the length of a square and its area);
> - investigate and describe situations involving inverse relationships (e.g., the more friends the fewer the cookies for each person, the larger the denominator in a unit fraction the smaller the quantity);
> - identify, express, and verify generalizations and use them to make predictions (e.g., doubling a number then doubling again is the same as multiplying by four).
>
> **Use symbolic forms to represent and analyze mathematical situations and structures**
> In grades 3-5, all students should-
> - identify and use relationships between operations to solve problems (e.g. multiplication as the inverse of division);
> - identify and use algebraic properties of operations to solve problems, e.g., 28×7 is equivalent to $(7 \times 20) + (7 \times 8)$ or $(7 \times 30) - (7 \times 2)$;
> - develop the concept of variable as a useful tool for representing unknown quantities;
> - use variables (boxes, letters, or other symbols) to solve problems or to describe general rules.
>
> **Use mathematical models and analyze change in both real and abstract contexts**
> In grades 3-5, all students should-
> - represent and investigate how a change in one variable relates to the change in a second variable (e.g., the height of a plant over time);
> - identify and describe situations with varying rates of change (e.g., a fund-raising effort brought in a small, steady amount of money in the beginning, but more each day as the deadline approached).
>
> (NCTM, 1998, pp. 163-164)

À ce niveau, selon les auteurs, les élèves développent des idées algébriques quand ils construisent ou identifient des patrons numériques ou géométriques, décrivent

verbalement des patrons et les représentent à l'aide de tableaux ou symboles, cherchent et appliquent des relations entre des quantités qui varient pour faire des prédictions, élaborent des généralisations (ou règles) et les vérifient, utilisent des graphes pour décrire des patrons et faire des prévisions, ainsi que pour explorer des propriétés numériques. Les élèves explorent aussi la notion de variable et commencent à l'utiliser comme «placeholder» pour représenter une inconnue ou une quantité qui varie.

Également, les élèves sont amenés à découvrir les règles du calcul algébrique (propriétés des opérations et transformations algébriques), valides dans les systèmes classiques de nombres, par des généralisations à partir de cas particuliers numériques ou par l'utilisation de modèles géométriques :

> Examples of algebraic properties such as commutativity, associativity, and distributivity of multiplication arise as students work with numbers and should be the focus of informal discussion and student investigation. Is 5 × 7 the same as 7 × 5? Will such a reversing of factors always result in the same product? What if the factors are larger? What if the factors are decimal numbers? How can you justify that the commutative property holds for the multiplication of any numbers? Students might use an area model to show that 4 × 5 and 5 × 4 have the same physical representation and the same square units of area. The same kind of model can be used later to show that commutativity holds for fractions and decimals as well. Students can also determine whether commutativity is a characteristic of the other operations (addition, subtraction, division).
> (NCTM, 1998, pp 166-167.)

À ce niveau, la notion de variable est introduite sous forme de *boîte*, *lettre* ou *symbole*.

> As students explore patterns and note relationships, they should be encouraged to represent their thinking. At first this can be with words ("multiplying the number of cubes by 4 and adding 2 gives the surface area of the tower"), and later students can also record a pattern by using informal or formal variable notation, $4 \times N + 2 = S$. Variable notation is an especially important tool as students begin to work with generalizations. (NCTM, 1998, p. 167)

Pour le niveau 6e à 8e année, le standard «Patterns, Functions and Algebra» est explicité ainsi :

> **Understand various types of patterns and functional relationships**
> In grades 6-8, all students should-

- analyze, create, and generalize numeric and visual patterns paying particular attention to patterns that have a recursive nature;
- use patterns to solve mathematical and applied problems;
- represent a variety of relations and functions with tables, graphs, verbal rules, and, when possible, symbolic rules.

Use symbolic forms to represent and analyze mathematical situations and structures

In grades 6-8, all students should-

- develop a sound conceptual understanding of equation and of variable;
- explore relationships between symbolic expressions and graphs, paying particular attention to the horizontal and vertical intercepts, points of intersection, and slope (for linear relations);
- become fluent in generating equivalent expressions for simple algebraic expressions and in solving linear equations and inequalities;
- use symbolic algebra to represent situations and to solve problems, especially those that involve linear relationships.

Use mathematical models and analyze change in both real and abstract contexts

In grades 6-8, all students should-

- model and solve contextualized problems using various representations, such as graphs and tables, to understand the purpose and utility of each representation;
- develop an initial understanding of rate of change, with emphasis on the connections among slope of a line, constant rate of change, and their meaning in context;
- explore different types of change occurring in discrete patterns, such as proportional and linear change.

(NCTM, 1998, pp. 221-222)

À ce niveau, l'algèbre est donc abordée selon plusieurs perspectives à la fois : par l'étude de patrons, de fonctions et relations, ou langage, représentations et structures basées sur une généralisation de l'arithmétique, ou encore comme un outil pour modéliser des problèmes et idées mathématiques (*ibid.*) Les élèves sont initiés à un langage algébrique plus formel, lequel est exploité dans la résolution d'équations linéaires. En effet, soulignent les auteurs :

> It is essential that students become proficient in working with simple algebraic expressions, including generating equivalent expressions and using and evaluating simple formulas. By the end of the middle grades,

> students should be able to solve linear equations in several ways, with or without a calculator, as appropriate. (p. 221)

De plus, les élèves sont appelés à appréhender la notion de *linéarité*. Ils apprennent également à distinguer les relations fonctionnelles linéaires de celles qui ne le sont pas, et à relier leurs connaissances des fonctions linéaires avec les notions de *rapport* et de *proportion*.

> (...) is also critical that they develop [the students] a conceptual understanding of variables and equations, that they learn to distinguish linear relationships from non-linear ones, and that they connect their experiences with linear functions to their understandings of ratio and proportion. Through their experiences in the middle grades, students should develop an understanding of, and competence in, working with linearity. (*ibid.*)

Pour le niveau 9e à 12e année, le standard «Patterns, Functions and Algebra» est explicité ainsi :

> **Understand various types of patterns and functional relationships**
> In grades 9-12, all students should-
> - recognize equivalent forms of an expression, equation, function or relation;
> - be familiar with classes of functions, including linear, quadratic, power, polynomial, rational, absolute value, exponential, logarithmic, trigonometric, and step functions; understand piecewise-defined functions and their properties; analyze the effects of parameter changes; and describe local and global behavior;
> - select appropriate representations (numerical, graphical, verbal, and symbolic) for the functions and relations embedded in quantitative situations, convert flexibly among representations, interpret representations, and use them to interpret the situations represented;
> - use a variety of symbolic representations, including recursive definitions and parametric equations, to explore the behavior of functions and relations;
> - reason (from graphs, tables, and formulas) about functions derived from other functions via transformation (e.g., $g(x) = 3\ f(x - 2) + 5$), inversion, composition, and arithmetic combination.
>
> **Use symbolic forms to represent and analyze mathematical situations and structures**
> In grades 9-12, all students should-

- represent situations that involve variable quantities with expressions, equations, inequalities, and systems of equations using a variety of equivalent forms;
- develop fluency operating on polynomials, vectors, and matrices using by-hand operations for the simple cases and using technology for more complex cases;
- understand symbolic algebra as abstracted arithmetic;
- be able to explain, compare, and contrast the major properties of the objects and operations defined within and across systems (e.g., rational numbers, polynomials, matrices, and functions) as they follow certain rules or laws of structure;
- develop strategies for deciding whether symbolic results generated with technological tools are reasonable, and interpret such results in meaningful ways.

Use **mathematical models and analyze change in both real and abstract contexts**

In grades 9-12, all students should-

- model a wide range of phenomena with a variety of functions including linear, quadratic, exponential, rational, trigonometric, and recursively defined functions and recognize that a particular type of function can model many different situations;
- approximate and interpret accumulation and rates of change, both graphically and numerically, for functions representing a variety of situations;
- approximate and find intercepts, local extreme values, and asymptotic behaviour of functions, and interpret such results in given contexts.

(NCTM, 1998, pp. 282-283)

À ce niveau, comme on le constate, les objectifs généraux visés en algèbre sont bien plus ambitieux qu'aux niveaux précédents. Tous les aspects de l'algèbre, langage, fonctions modélisations et structures y sont présents.

En conclusion, on peut affirmer que le document *Principles and Standards* pour 2000 du NCTM propose une approche didactique «mixte» de l'algèbre qui prend en compte tous ses aspects importants. Cependant, il nous semble qu'elle n'est pas fondée sur une vision suffisamment claire et précise de l'algèbre et de la pensée algébrique. Ceci est dû, nous semble-t-il, à l'inexistence d'un cadre théorique de référence explicite de l'algèbre et de la pensée algébrique obtenu à partir d'une analyse épistémologique. En particulier, en accordant une importance exagérée au processus de généralisation, les

auteurs des nouveaux standards semblent penser que la pensée algébrique se réduirait à cette seule composante essentielle, passant sous silence l'habileté à penser analytiquement, autre composante essentielle de la pensée algébrique.

6.5 DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié notre première question de recherche *Quelle approche didactique utiliser dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base ?* Après avoir présenté les approches didactiques «langage», «structures», «modélisation» et «fonctions» pouvant être transposées du modèle M.I.A.P.A., nous avons soutenu que dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base, il y a lieu d'utiliser une approche didactique «mixte», intégrant de manière cohérente les quatre approches précédentes. Nous avons ainsi répondu à notre première question de recherche.

Ensuite, nous avons analysé les approches utilisées traditionnellement dans l'enseignement de l'algèbre : «arithmétique généralisée», «langage» et une approche basée sur les extensions successives des systèmes de nombres. Nous avons également analysé des propositions récentes pour l'enseignement de l'algèbre, notamment celles qui sont présentées dans l'ouvrage collectif: *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching* (Bednarz, Kieran, Lee ; 1996), une approche proposée par Chevallard, une autre par Kaput et deux propositions récentes du NCTM, la première proposée par le groupe de travail sur l'algèbre AWG du NCTM et la seconde, dans le document *Principles and Standards* de 2000 du NCTM. La plupart de ces auteurs adhèrent à notre point de vue, à savoir : dans l'enseignement de l'algèbre, il faut tenir compte de plusieurs aspects de l'algèbre. Également, l'analyse de toutes ces propositions nous a permis, d'une part, de confirmer la pertinence des approches «langage», «structures», «modélisation» et «fonctions» dans l'enseignement de l'algèbre à l'école de base et, d'autre part, de constater qu'il n'est proposé aucun autre aspect essentiel de l'algèbre dont nous n'avons pas tenu compte.

Par ailleurs, ces propositions nous ont apporté des éclairages intéressants sur certains aspects de l'algèbre et de la pensée algébrique et proposent un certain nombre d'idées et de modalités applicables dans l'enseignement de l'algèbre. (Nous allons exploiter certaines d'entres elles dans la formulation de principes directeurs au prochain chapitre). Cependant, il nous a semblé que chacune de ces propositions, ou bien n'explore qu'un aspect particulier de l'algèbre (comme le cas de toutes celles présentées dans l'ouvrage collectif *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching* (Bednarz, Kieran, Lee ; 1996)), ou bien elle tient compte de tous ses aspects importants mais présente quelques failles. Dans ce dernier cas, on peut citer la proposition de Kaput, et les deux propositions du NCTM qui, par exemple, ne distinguent pas clairement entre l'algèbre et la pensée algébrique et ne soulignent pas l'importance de l'habileté à penser analytiquement en algèbre.

En revanche, notre cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique nous a permis souvent d'éviter certaines confusions et de ne pas trop élargir inutilement la vision de l'algèbre jusqu'à diluer complètement sa signification. Par exemple, pour nous une activité mathématique où une opération n'est pas en jeu n'est pas une activité algébrique; en algèbre on reste dans le cadre des processus finis seulement, ce qui élimine l'étude de plusieurs fonctions en algèbre. De plus, notre cadre conceptuel précise le sens des termes et concepts utilisés tout en distinguant clairement l'algèbre de la pensée algébrique.

En conclusion, nous considérons que nous avons répondu à la première question de recherche *Quelle approche didactique utiliser dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base* ? Il s'agit d'une approche didactique «mixte», intégrant de manière cohérente les approches «langage», «structures», «fonction» et «modélisation».

Chapitre 7

Principes à la base d'un curriculum renouvelé d'algèbre pour l'éducation de base

7.1 INTRODUCTION

Dans ce septième chapitre, nous présentons notre réponse à la deuxième question de recherche : Sur quels principes peut-on se baser pour évaluer ou construire un curriculum d'algèbre pour tous véritablement adapté à la scolarité de base ?

Nous allons répondre à cette question en nous appuyant sur tout ce qui précède, notamment sur notre cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique (chapitre 3) et la notion d'éducation en algèbre pour tous, ainsi que sur notre étude au chapitre 6 des approches didactiques de l'algèbre à l'école de base.

Tel qu'indiqué dans le titre de ce chapitre, nous ne visons que l'école de base et non l'école en général. Nous ne nous préoccupons pas ici de l'algèbre que l'on devrait enseigner à une minorité d'élèves à la fin de l'école secondaire en préparation à des études supérieures bien qu'il s'agisse là d'un problème important. D'un autre côté, les principes que nous allons présenter visent l'ensemble des années de l'école de base et non un niveau spécifique en particulier.

Ces principes sont de nature générale et ont des implications sur différentes composantes du curriculum. Dans leur présentation, nous allons énoncer des indicateurs qui pourront aider à juger si ces principes sont réalisés ou non par un curriculum. Dans la section qui suit, nous commençons par préciser la nature de ces indicateurs.

7.2 RECHERCHE D'INDICATEURS

Les principes que nous allons formuler dans la prochaine section, ne peuvent pas être directement utilisés pour construire ou analyser un curriculum d'algèbre pour tous. Chacun d'eux, en effet, devrait être accompagné d'un indicateur qui le rend plus opérationnel. En adaptant une définition proposée par Voyer (1994), nous définissons

un indicateur comme *un ensemble d'éléments informationnels significatifs, perçus, traités et présentés dans l'optique d'évaluer le degré de concrétisation d'un principe dans un curriculum d'algèbre pour tous.*

Rondeau (1999)[86] fait observer que selon *Le Robert, Dictionnaire historique de la langue française*, deux éléments sont importants dans la compréhension et l'interprétation d'un indicateur : une échelle de valeurs et un système de significations qui lui est rattaché. Pour les besoins de notre travail, nous avons choisi d'utiliser des indicateurs de nature qualitative accompagnés d'une échelle à quatre niveaux de valeurs. Chacun de ces niveaux correspond à une interprétation du degré de concrétisation d'un principe par le curriculum :

Grille d'interprétation des indicateurs

Échelle de valeurs	Système des significations
Niveau 0	Le curriculum ne tient pas compte du principe
Niveau 1	Le curriculum satisfait partiellement au principe
Niveau 2	Le curriculum satisfait au principe
Niveau 3	Le curriculum satisfait fortement au principe

Quand l'indicateur vaut 0, nous dirons que le curriculum ne tient pas compte du principe en question. Au niveau 1, le curriculum ne satisfait pas entièrement à l'attente; dans ce cas le principe reste un vœu pieu, il n'est pas concrétisé effectivement. Au niveau 2, le curriculum satisfait au principe. Ce dernier est bien pris en considération dans toutes les composantes du curriculum (objectifs généraux et spécifiques, moyens et orientations méthodologiques, évaluation). Le niveau 3 est le niveau optimal, celui où le curriculum satisfait fortement au principe ; en insistant sur la concrétisation du

[86] Jean-Claude Rondeau (1999) Les indicateurs en éducation. Le point de vue international et quelques indicateurs nationaux. http://membres.point-net.com/~jerondea/indicateurs.html

principe, en explicitant des mesures pour le réaliser et en donnant des précisions et des illustrations pour aider à son application.

Chacun des niveaux du système de signification doit être explicité par un critère. La détermination de la valeur d'un indicateur nécessite une analyse du curriculum (ou de certaines de ces composantes) pour vérifier lequel des quatre critère, et donc lequel des quatre niveaux, du système de valeurs est satisfait par le curriculum.

Ces critères ne devraient pas être trop vagues. Par exemple, l'énoncé, «il faut que l'enseignement de l'algèbre occupe une place importante dans le curriculum de mathématiques à l'école» est trop vague car il pourrait conduire à émettre des jugements très variés. Les uns répondront par l'affirmative, car le curriculum accorde suffisamment de temps à l'enseignement de l'algèbre, d'autres diront le contraire, car, bien que le temps alloué à l'enseignement de l'algèbre soit suffisant par rapport à l'algèbre enseignée, cette dernière reste un sujet d'enseignement isolé et certains aspects important de l'algèbre ne sont pas pris en compte.

7.3 PRINCIPES GÉNÉRAUX À RESPECTER PAR UN CURRICULUM D'ALGÈBRE POUR TOUS

Nous présentons ici huit principes généraux qui doivent être, selon nous, à la base d'un curriculum d'algèbre pour tous.

7.3.1 Premier principe général

Ce premier principe concerne l'accessibilité du curriculum d'algèbre à tous les élèves.

Principe 1 (Un curriculum pour tous)
Le curriculum d'algèbre doit s'adresser à *tous* les élèves durant la scolarité obligatoire.

Ce principe est fondé sur deux idées de base. La première, discutée dans le chapitre 4, soutient que, dans une société moderne *tous* les citoyens doivent avoir une éducation minimale de base qui leur permette d'agir en acteur social éclairé et de vivre une vie décente. Aussi, la principale mission de l'école de base est d'assurer que *tous* les élèves réalisent des apprentissages de base dans des disciplines fondamentales, dont les mathématiques font partie. Rappelons que par le qualificatif *tous*, nous signifions la masse des élèves sans distinction quant à leur prédisposition à faire des mathématiques, à leur sexe, à leur appartenance ethnique et socio-économique. Bien sûr, nous sommes conscient qu'en pratique, en plus de la catégorie des élèves qui ont besoin d'une éducation spécialisée dû à leur handicap, il existera une minorité d'élèves qui ne seront pas rejoints par le curriculum de mathématiques. Il est toutefois primordial de concevoir celui-ci en visant *tous* les élèves

La seconde idée est que, d'une part, l'algèbre doit être intégrée aux mathématiques enseignées à tous dans l'école de base, et, d'autre part, *tous* les élèves peuvent apprendre l'algèbre, si on leur présente un curriculum d'algèbre à la fois accessible à tous, pertinent pour tous et signifiant pour tous.

En effet, nous pensons qu'il est faux de croire que l'apprentissage des mathématiques et de l'algèbre en particulier ne peut être accessible qu'à une minorité d'élèves seulement. Comme l'affirment les auteurs de la dernière proposition des standards du NCTM:

> Research-based examples exist to demonstrate the validity of the view that all children, including those who have been traditionally underserved, can learn mathematics when they have access to quality mathematics instructional programs. (NCTM, 1998, p. 26)

Élaborer un curriculum d'algèbre accessible à tous exige certaines options curriculaires par rapport à chacun des pôles du curriculum.

Ainsi, il s'agit de viser des objectifs d'apprentissage en fonction de la masse des élèves et non d'une élite. Dans ce sens, les activités d'apprentissages devraient, selon nous,

être choisies en fonction des élèves les plus lents et ensuite approfondies et élargies pour les élèves plus rapides. Ce point de vue est défendu par Cokcroft :

> [D]esigning the program from the bottom up, first deciding what kind of work is appropriate for our slower students, and then, second, extending it to provide for the needs of those who absorb new ideas more easily and more quickly. I do not believe that we can begin by considering the needs of the most able, or even, as a compromise, the needs of the average students, in the hope, by watering down such material, omitting a few topics, and lightening the load in others, that we will finish with a program appropriate for the least able. (Cokcroft, 1994, p. 38)

Précisons toutefois que cela ne signifie pas se restreindre à des objectifs d'apprentissage modestes.

Au niveau des moyens et des orientations méthodologiques, différentes options peuvent être utilisées pour rendre accessible l'apprentissage d'un sujet en algèbre à la masse des élèves.

Premièrement, beaucoup d'auteurs insistent dans l'apprentissage des mathématiques sur le passage du concret à l'abstrait, de l'informel au formel et d'une étape de manipulation et d'exploration à une étape plus formelle et abstraite. Dans ce sens, il nous semble tout à fait erroné de débuter l'apprentissage de l'algèbre par l'apprentissage de son formalisme comme on le fait encore dans des curriculums de certains pays. Il faut prévoir une phase préliminaire, où l'élève explore différents concepts, comme celui de variable, d'inconnue, d'opération, et à des manières de penser, comme raisonner analytiquement, généraliser, abstraire. D'autres précisions dans ce sens sont présentées dans l'explication du principe 5.

Une deuxième mesure pour augmenter l'accessibilité de l'algèbre pour tous, consiste à augmenter les moyens et la qualité d'assistance aux élèves, surtout les plus lents d'entre eux. Par exemple, dans le curriculum on doit aménager une place à une pédagogie de remédiation pour pouvoir accompagner les élèves qui vont éprouver des difficultés dans leur apprentissage de l'algèbre. Dans ce sens, notre cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique peut fournir des éclairages utiles pour l'analyse

conceptuelle de situations d'élèves en difficulté. D'un autre côté, comme pour toute réforme, il est important de préparer les futurs enseignants et d'actualiser la formation des enseignants en exercice pour assurer une bonne implantation du curriculum. C'est encore plus évident dans le cas où le primaire serait envisagé comme une phase d'exploration de concepts algébriques et d'initiation à la pensée algébrique. En effet, d'une part l'algèbre n'est pas traditionnellement enseignée à ce niveau d'étude, et, d'autre part, l'enseignant doit connaître les mathématiques qui sont à la base des situations concrètes ou d'un matériel physique de manipulation. Comment, par exemple, un enseignant réussira-t-il à bien gérer une activité dont l'objectif est de faire découvrir par les élèves l'isomorphisme de deux systèmes algébriques concrets, s'il n'appréhende pas la notion de structure algébrique ? Que ce soit pour la confection d'activité d'apprentissage, pour leur gestion, pour l'évaluation formative – notamment pour l'évaluation du développement de la pensée algébrique – l'enseignant doit à la fois maîtriser un savoir mathématique de plus en plus complexe et pouvoir analyser conceptuellement des productions d'élèves (verbales ou écrites). Dans ces conditions, nous nous demandons si le temps n'est pas venu d'avoir des enseignants au primaires spécialisés dans l'enseignement des mathématiques. Cette question déborde la réflexion didactique car elle a des répercussions politiques indiscutables.

Troisièmement, il faut envisager l'intégration d'outils technologiques appropriés dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Utiliser une calculatrice pour effectuer un calcul complexe, quand celui-ci n'est pas la priorité de l'apprentissage, pour représenter graphiquement une fonction, ou pour recueillir des données dans le cadre d'une expérience (simulation par ordinateur, ou appareil de mesure muni d'une sonde, par exemple) peut aider les élèves à résoudre des problèmes complexes, à modéliser des phénomènes et des situations réelles ou mathématiques, qu'il ne peut faire sans le secours de tels outils.

Par ailleurs, pour pousser les élèves à s'engager activement dans leur apprentissage, le curriculum d'algèbre doit leur permettre de vivre des expériences riches, attrayantes et

stimulantes. Dans ce sens, l'algèbre devrait être abordée en tant que moyen pour aider l'élève à comprendre le monde qui l'entoure. Kaput explique dans ce sens:

> The mathematical content strands should grow out of acts of sense making. Students develop mathematical ideas in order to render one's experience knowable and communicable. They build and refine models that capture experienced patterns and lead to new patterns at higher levels of abstraction. But they begin by taping fundamental intuitions and building on natural ways of apprehending, organizing, navigating and communicating. The models are developed using ever more powerful and systematic language and representations, beginning with physical materials and iconic and graphical forms but leading to an array of efficient languages that include potent syntactical structure embodied within computational media. This means, among other things, learning algebra as a sense-making tool throughout elementary and middle school. (Kaput, 1994)

En particulier, les activités utilisées pour l'apprentissage de l'algèbre devraient être signifiantes pour les élèves. Dans ce sens, il est important que le curriculum utilise assez tôt des situations à contextes. Ces contextes doivent toucher les cinq catégories suivantes : *mathématique, autres disciplines scientifiques, société, histoire et culture, esthétique.* En effet, ces contextes doivent être déterminés pour répondre aux objectifs suivants : 1) comprendre des situations et résoudre des problèmes (inspirés) du quotidien, 2) comprendre les disciplines scolaires qui utilisent l'algèbre; 3) vivre des expériences agréables riches et motivantes.

Grille de l'indicateur du principe 1

	L'analyse des textes présentant le curriculum montre que le principe de rendre l'enseignement de l'algèbre accessible à tous les élèves est :
Niveau 0	Non cité, même de manière implicite.
Niveau 1	Cité explicitement au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, mais ne se répercute pas au niveau des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques et de l'évaluation.
Niveau 2	Cité explicitement au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques, de l'évaluation; mais sans en fournir

	explicitement des mesures concrètes ni en l'illustrant à l'aide d'exemples détaillés.
Niveau 3	Cité explicitement au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques, de l'évaluation; en le précisant des mesures pour le concrétiser et en l'illustrant à l'aide d'exemples détaillés.

Sens de l'indicateur

Les quatre critères portent sur l'analyse des textes présentant le curriculum officiel (ou visé) des mathématiques couvrant la période de la scolarité obligatoire. Ces textes peuvent être le programme cadre, le programme des programmes, les instructions pédagogiques, le programme d'étude ou tout document officiel présentant le curriculum.

Le niveau 0 de l'indicateur correspond au cas où l'algèbre n'est pas ou est partiellement enseignée dans l'éducation de base. Dans ce dernier cas, au terme de leur scolarité obligatoire les élèves n'auront pas eu l'occasion de s'initier à tous les aspects importants de l'algèbre, à savoir ceux illustrés dans la face algèbre du M.I.A.P.A. C'est le cas par exemple de certains curriculums traditionnels qui n'abordent pas à l'école de base l'aspect fonction ou modélisation de l'algèbre.

Le niveau 1 de l'indicateur correspond au cas où l'enseignement de l'algèbre à tous les élèves est une intention qui se dégage de l'analyse des buts de l'enseignement des mathématiques, mais cette intention n'est pas concrétisée au niveau des objectifs généraux et spécifiques, ni au niveau des moyens et orientations méthodologiques et au niveau de l'évaluation.

Le niveau 2 de l'indicateur correspond au cas où l'enseignement de l'algèbre à tous les élèves est explicité dans les buts de l'enseignement des mathématiques, dans les objectifs généraux et spécifiques, dans les moyens et orientations méthodologiques et dans l'évaluation. Cependant, les textes du curriculum officiel des mathématiques pour tous, ne vont pas jusqu'à prévoir des mesures pour assurer l'accessibilité de l'algèbre à

tous les élèves (comme ceux que nous avons proposés plus haut, par exemple), ni ne fournissent d'exemples détaillés pour aider les enseignants à bien le concrétiser.

Le niveau 3 est celui ou les textes du curriculum officiel montrent que l'enseignement de l'algèbre pour tous est sérieusement pris en compte par les concepteurs du curriculum, par le fait que, d'une part, cette préoccupation apparaît dans la présentations de toutes les composantes du curriculum et, d'autre part, par le fait qu'ils tentent d'illustrer par des exemples et des précisions ce que ce principe signifie, et qu'ils ont mis en place un ensemble de mesures pour faciliter son application.

7.3.2 Deuxième principe général

Ce deuxième principe annonce l'importance de la complémentarité entre l'algèbre et la pensée algébrique.

Principe 2 (Complémentarité algèbre - pensée algébrique)
Le curriculum d'algèbre doit accorder une importance aussi bien à l'acquisition de savoirs et savoir-faire en algèbre qu'au développement de la pensée algébrique chez les élèves.

Dans notre cadre conceptuel (3.2), nous avons expliqué pourquoi il faut insister à la fois sur l'algèbre et sur la pensée algébrique. D'un point de vue épistémologique, nous concevons l'algèbre comme un type particulier d'activités mathématiques, et nous concevons la pensée algébrique comme un ensemble d'habiletés intellectuelles indispensables pour conduire ce type d'activités. D'un point de vue didactique, il est important de développer chez l'élèves à la fois des savoirs et savoir-faire algébriques ainsi que la pensée algébrique. Le développement de la pensée algébrique se fait à travers des activités algébriques. Dans ce sens, les aspects de la face algèbre du M.I.A.P.A. servent à structurer le contenu algébrique à enseigner, la pensée algébrique reste en définitive le véritable objectif d'apprentissage.

Ce principe doit se répercuter sur tous les aspects du curriculum et non seulement au niveau des objectifs. Ainsi, l'évaluation doit porter non seulement sur l'acquisition de connaissance mais également sur celles d'habiletés intellectuelles de la pensée algébrique. Évaluer l'acquisition de la pensée algébrique doit être une préoccupation continuelle de la part de l'enseignant, soit pour soutenir la progression de l'apprentissage chez l'élève (évaluation formative) ou pour dresser le bilan des apprentissages (évaluation sommative).

Grille de l'indicateur du principe 2

	Une analyse des textes présentant le curriculum laisse voir que celui-ci vise à donner de l'importance aussi bien à l'acquisition de savoir et savoir-faire qu'au développement de la pensée algébrique.
Niveau 0	Aucune allusion à ce principe.
Niveau 1	Le principe figure de manière explicite au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques mais non au niveau des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques et de l'évaluation.
Niveau 2	Le principe figure de manière explicite au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques, de l'évaluation, mais sans en fournir explicitement des mesures pour le concrétiser ni d'exemples pour l'illustrer.
Niveau 3	Le principe figure explicitement au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques, de l'évaluation; de plus, les textes précisent des mesures pour le concrétiser et les illustrent par des exemples détaillés.

Sens de l'indicateur

Comme pour l'indicateur précédent, il s'agit ici d'analyser les textes présentant le curriculum officiel des mathématiques enseignées à l'école de base, et de vérifier si les critères annoncés sont satisfaits. Le niveau de l'indicateur est non nul pour les curriculums qui déclarent viser le développement de la pensée algébrique chez les élèves. Dans ce cas, l'apprentissage de savoir et savoir-faire algébriques est aussi visé; car il est invraisemblable que la pensée algébrique soit l'unique objectif d'apprentissage.

L'analyse des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques et des moyens montrera jusqu'à quel point ce principe est concrétisé dans le curriculum.

7.3.3 Troisième principe général

Le troisième principe est relatif au caractère multiple de l'algèbre.

Principe 3

(Multiplicité des aspects de l'algèbre)

Le curriculum d'algèbre pour tous doit tenir compte de toutes les composantes de la face algèbre du M.I.A.P.A., à savoir 1) Construction et interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques ; 2) manipulation d'expressions algébriques en suivant des règles prédéfinies et 3) élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.).

Autrement dit, le curriculum doit être basé sur une approche didactique mixte de l'algèbre.

Ce principe exprime la multiplicité des aspects de l'algèbre et traduit notre réponse à la première question de recherche que nous avons présentée dans le chapitre 6. En effet, rappelons que nous avons vu au chapitre 3 qu'il existe plusieurs aspects caractéristiques de l'algèbre. En tant que discipline scientifique, l'algèbre ne peut se résumer à un seul de ces aspects essentiels. Par suite, toute transposition didactique de l'algèbre doit tenir compte de tous ces aspects à la fois. En tant que discipline scolaire, elle ne peut omettre aucune des approches didactiques possibles présentées au chapitre 6, lesquelles sont basées sur les composantes de la face algèbre du M.I.A.P.A.

Rappelons qu'une approche didactique mixte de l'algèbre intègre de façon cohérente les approches «langage», «fonction», «modélisation» et «structures». Naturellement, cela ne signifie pas que tous ces aspects doivent apparaître à tout moment du cursus, en même temps et avec le même degré d'importance.

Au niveau des objectifs, il s'agit de viser des objectifs relatifs à chacune des quatre approches didactiques de l'algèbre, comme ceux présentés dans 6.2, ainsi que ceux qui font appel à plusieurs approches didactiques de l'algèbre, comme par exemple : *utiliser le langage algébrique pour modéliser et analyser des modèles de situations algébrisables ou des relations fonctionnelles ou pour comparer la structure de deux situations algébrisables.*

Ce principe a des répercussions sur le pôle des moyens et orientations méthodologiques du curriculum. En effet, premièrement, on doit utiliser dans le curriculum des activités intégrant des approches didactiques différentes de l'algèbre. Ceci peut être fait de deux manières différentes. La première consiste à utiliser des activités synthèses permettant à l'élève d'appliquer des apprentissages réalisés par rapport à deux approches didactiques de l'algèbre ou plus. La seconde manière est d'utiliser des apprentissages réalisés dans le cadre d'une approche comme base à des apprentissages nouveaux dans le cadre d'une approche didactique différente. Par exemple, utiliser l'approche fonction pour aider les élèves à développer le langage algébrique (voir par exemple les travaux de Kieran, 1996).

Par rapport à la dimension de l'évaluation, il faut que le curriculum prévoie l'évaluation à la fois des objectifs relatifs à chacune des approches didactiques de l'algèbre ainsi que ceux relatifs à plusieurs d'entre eux.

Grille de l'indicateur du principe 3

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que :

Niveau 0	Une des quatre approches didactiques de l'algèbre n'est pas utilisée
Niveau 1	Toutes les approches sont utilisées mais de manière successive.
Niveau 2	Les quatre approches didactiques sont utilisées chaque année du cursus de l'enseignement de l'algèbre. Des activités sont prévues pour créer des passerelles entres les approches.

Niveau 3	Les quatre approches sont utilisées. Fréquemment, on utilise des situations d'apprentissages intégrant différentes approches didactiques de l'algèbre.

Sens de l'indicateur

Le niveau 0 est celui où le curriculum de l'algèbre pour tous, ignore une des quatre approches didactiques de l'algèbre. De ce fait, à la fin de la période de l'enseignement de l'algèbre pour tous, les élèves n'auront pas été initiés à un certain aspect de l'algèbre. Ainsi, par exemple, dans les curriculums traditionnels d'algèbre, la plupart des élèves ne sont pas initiés à l'approche fonction ou encore à l'approche modélisation de l'algèbre. Dans ce cas, ce principe n'est pas pris en compte par ces curriculums.

Dans le niveau 1, les quatre approches didactiques de l'algèbre sont utilisées mais l'une après l'autre ou sans souci de les intégrer. C'est le cas, par exemple, des curriculums, à l'image du curriculum marocain en vigueur depuis les années 1980, qui commencent l'enseignement de l'algèbre par l'apprentissage du langage algébrique, et entament ensuite l'étude des structures des systèmes de nombres.

Au niveau 2, les quatre approches sont intégrées dans le curriculum. Une analyse du programme d'algèbre montre que ces quatre approches sont présentes chaque année et à des moments différents. Une telle analyse laisse aussi apparaître l'existence d'activités synthèses intégrant plusieurs approches didactiques de l'algèbre.

Au niveau 3 les quatre approches didactiques de l'algèbre sont fortement intégrées. Une analyse du contenu algébrique à enseigner montre le souci d'utiliser fréquemment des activités intégrant plusieurs approches didactiques de l'algèbre.

7.3.4 Quatrième principe général

Le quatrième principe réfère au caractère multiple de la pensée algébrique.

Principe 4 (Multiplicité des aspects de la pensée algébrique)

Le curriculum d'algèbre pour tous doit tenir compte de toutes les composantes de la face pensée algébrique du modèle M.I.A.P.A., à savoir, 1) *habileté à penser analytiquement*; 2) *habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques*; 3) *habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies et 4) habileté à généraliser et à abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques.*

Ce principe est étroitement lié au précédent, puisque, dans notre conceptualisation, les quatre composantes de la pensée algébrique relatent les principales habiletés intellectuelles nécessaires dans les activités algébriques décrites dans la face algèbre du M.I.A.P.A. Or, une approche didactique mixte de l'algèbre est fondée sur une intégration de ces différents aspects de l'algèbre. La pertinence de ce principe relève alors de celle du précédent. En outre, les aspects de la face algèbre du M.I.A.P.A agissent comme moyen structurant le contenu algébrique à enseigner; ils fournissent le type d'activités algébriques à travers lesquelles doit se développer la pensée algébrique. Cette dernière reste, en définitive, le véritable objet d'apprentissage. Précisons que l'ensemble des habiletés intellectuelles que nous avons identifié pour décrire la pensée algébrique ne prétend pas être exhaustif. Néanmoins, selon notre analyse, il contient celles qui sont caractéristiques et essentielles lorsqu'on fait de l'algèbre à un niveau élémentaire.

Ce principe signifie que les quatre habiletés intellectuelles doivent être des objectifs d'apprentissage, avec d'autres possiblement. De plus, dans le cadre d'une approche didactique mixte de l'algèbre, ces quatre aspects de la pensée algébrique doivent se développer chez les élèves de manière conjointe et progressive.

En particulier, au début de l'apprentissage de l'algèbre, on devrait viser à développer l'habileté à penser analytiquement. Nous avons vu que l'aspect analytique est l'une des caractéristiques essentielles du raisonnement algébrique ; il a joué un rôle important dans le développement historique de l'algèbre, notamment à ses débuts. En effet, le fait

d'accepter de considérer l'inconnue et d'opérer sur elle comme si elle était connue, et le fait de masquer la dimension sémantique des objets (ne pas tenir compte de la numérosité d'un nombre, par exemple) permet à l'algèbre de se doter d'une dimension syntaxique, et donc de garder une trace des opérations effectuées et de pouvoir offrir ainsi des formes pour modéliser différents types de situations. Sans cette forme de pensée l'algèbre ne peut, en particulier, se prévaloir de son caractère général. Il est donc primordial de développer ce type de pensée chez l'élève dès les premiers moments et tout le long de l'apprentissage de l'algèbre.

L'habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques est tout à fait essentielle dans l'utilisation de l'algèbre pour l'étude de situations du monde réel, d'autres disciplines ou d'autres branches des mathématiques. Sans cette composante de la pensée algébrique, faire de l'algèbre serait une activité mathématique tournée vers elle-même, consistant, à un niveau élémentaire, à manipuler des expressions symboliques sans aucune signification, de manière sténographique si l'on peut dire, et à un niveau plus avancé à étudier des structures abstraites de manière formelle. Il est tout à fait essentiel que l'apprentissage de l'algèbre soit significatif pour les élèves et ce à tout moment de leur apprentissage.

L'habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies est tout à fait essentielle pour maîtriser le langage algébrique. Ce dernier n'est pas uniquement un langage de représentation mais aussi, et surtout, un langage de transformation. C'est le fait de manipuler des expressions algébriques qui rend l'activité algébrique dynamique et fait d'elle un moyen pour construire de nouvelles connaissances. Cette habileté intellectuelle s'appuie sur l'habileté à penser analytiquement. Elle se trouve en fait implicite dans la caractérisation même de la pensée analytique, puisque, le fait de considérer l'inconnue et d'accepter d'opérer sur elle comme si elle était connue, nécessite de la représenter par un symbole et d'opérer sur ce symbole comme on opère sur les objets de l'espace de calcul dans lequel on travaille. On se trouve donc en train de manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies. Que ce soit dans

des activités de modélisation, de résolution de problèmes ou même des activités en algèbre abstraite cette composante de la pensée algébrique joue un rôle important.

Finalement, l'habileté à généraliser et à abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques, est, elle aussi, essentielle en algèbre, comme nous l'avons clarifié dans 3.4.4, et ce notamment au début de l'apprentissage de l'algèbre. En effet, l'habileté à appréhender la notion générale d'opération est fondamentale dans l'apprentissage de l'algèbre précisément compte tenu du rôle central que joue cette notion en algèbre. En outre, l'abstraction de structures de situations algébrisables est importante dans la construction de concepts algébriques comme celui d'équation ; de même le processus de généralisation est essentiel en algèbre et se trouve souvent en jeu dans l'activité algébrique.

Ce principe doit se répercuter au niveau de l'évaluation. Il est tout à fait important que le curriculum insiste sur l'évaluation du développement de la pensée algébrique.

Grille de l'indicateur du principe 4

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que :

Niveau 0	La pensée algébrique n'est pas un objectif explicite d'apprentissage.
Niveau 1	L'une des quatre composantes de la pensée algébriques n'est pas un objectif explicite d'apprentissage.
Niveau 2	Les quatre composantes de la pensée algébriques sont des objectifs d'apprentissages de l'algèbre, ces objectifs font l'objet d'évaluation, des activités sont prévues pour le développement de la pensée algébrique.
Niveau 3	En plus des critères du niveau 2, la pensée algébrique est un objet d'apprentissage propre. À cette fin, des moments précis du cursus sont prévus et des activités sont conçues selon une progression des apprentissages pour le développement des différentes composantes de la pensée algébrique.

Sens de l'indicateur

Le niveau 0 correspond au cas où la pensée algébrique n'est pas un objectif d'apprentissage.

Dans le niveau 1, une des quatre composantes de la pensée algébrique n'est pas déclarée être un objectif d'apprentissage. Se trouvent dans ce cas, par exemple, les curriculums qui sont basée sur une approche didactique de l'algèbre qui n'est pas mixte ou qui ne souligne pas l'importance d'une des quatre composantes de la pensée algébrique. C'est le cas par exemple de certaines propositions récentes, comme celle de Kaput, qui semblent passer sous silence l'importance de la pensée analytique.

Le niveau 2 est celui où les quatre composantes de la pensée algébrique sont déclarées être des objectifs d'apprentissage. Leur évaluation est prise en considération. De même, le curriculum consacre des activités spécifiques pour initier l'élève à une composante de la pensée algébrique ou à des fins d'évaluation.

Dans le niveau 3, en plus de la satisfaction du critère du niveau 2, la pensée algébrique est un objet d'enseignement et d'apprentissage, des moments précis de l'enseignement de l'algèbre sont réservés spécialement pour le développement explicite de la pensée algébrique. Nous sommes ici dans la situation analogue à celle des curriculums qui, mettant comme objectif d'apprentissage la résolution de problèmes, réservent des moments du cursus à l'apprentissage explicite d'un ensemble d'heuristiques et de stratégies de résolution de problèmes.

7.3.5 Cinquième principe général

Le cinquième principe est relatif à l'étalement de l'enseignement de l'algèbre sur plusieurs années d'étude.

Principe 5 (Étalement sur plusieurs années)

L'enseignement de l'algèbre pour tous doit être étalé sur plusieurs années, commencer dès le primaire de façon à inclure une phase préliminaire d'exploration.

L'apprentissage de l'algèbre telle que nous l'avons reconceptualisée, en particulier le développement de la pensée algébrique chez les élèves, demande du temps, il doit donc s'inscrire dans la durée. Dans ce sens, la plupart des éducateurs s'accordent à penser que l'enseignement de l'algèbre devrait s'étaler sur plusieurs années. Il est en effet clair que les habiletés à généraliser, à abstraire, à penser analytiquement, à manipuler le langage algébrique de manière formellement valide et fonctionnellement pertinente, à penser en terme de structures, à modéliser, etc., ne sont pas des processus de pensée que l'on peut développer dans un espace de temps limité ni que l'on peut cesser de développer. En effet, la plupart de ces habiletés se complexifient à mesure que la tâche mathématique, les concepts et les connaissances qui sont utilisés se complexifient. On sait par exemple, qu'il faut du temps pour que l'élève arrive à appréhender la notion d'opération comme un objet propre, ayant des propriétés, à avoir conscience que lorsqu'il calcule sur des nombres, la propriété de la commutativité est une propriété de l'opération d'addition et non des nombres, et, plus tard, que les propriétés de l'opération définissent des règles de calcul et qu'à leur tour ces règles de calcul définissent une structure algébrique commune à d'autres espaces de calcul algébrique.

Un autre exemple, la tendance à généraliser et à abstraire est un processus essentiel dans le développement des mathématiques, et de l'algèbre en particulier, son développement a lieu de la maternelle à l'université. Prenons par exemple l'activité suivante :

> Un enseignant fait remarquer à ses élèves que les nombres 1 +2 + 3 = 6 et 2+ 3 + 4 =9 sont divisibles par 3. Il leur demande alors s'il en est toujours ainsi.

Les élèves peuvent fournir plusieurs réponses.

Élève A : répond oui, cela marche toujours. Pour lui le «toujours» signifie les nombres 3 +4 + 5, 4 + 5+ 6, …., 29+30+31, pour lesquels il a vérifié la divisibilité par 3.

Élève B : répond oui, car si l'on prend trois nombres consécutifs et l'on note le nombre du milieu par n, ces nombres sont alors : n -1; n et n + 1 dont la somme vaut $3n$.

Élève C : répond oui; car si N est la somme de m nombres consécutifs, m étant impair; alors N est divisible par m. En effet, si $m = 2j + 1$, alors

$$N=(k-j)+(k-j+1)+...+(k-1)+k+(k+1)+...+(k+j-1)+(k+j)=(2j+1)k=mk$$

Il apparaît dans cet exemple, que dans une même situation, la tendance à généraliser peut avoir plusieurs niveaux de sophistication. Il en va de même pour les autres processus de la pensée algébrique.

Une autre raison d'étaler l'enseignement de l'algèbre sur de nombreuses années est le fait d'utiliser une approche didactique différente d'une arithmétique généralisée. En effet, traditionnellement l'apprentissage de l'algèbre devait prendre grandement appui sur les apprentissages réalisés en arithmétique. Aussi, l'algèbre ne commence que lorsque l'arithmétique est supposée suffisamment acquise, c'est-à-dire au début du secondaire. L'espace laissé à l'enseignement de l'algèbre dans le curriculum des mathématiques à l'école se trouve alors réduit et incite à commencer l'enseignement de l'algèbre de manière brusque, notamment par son formalisme. Ainsi, comme l'explique Kaput (1995b, p. 71)

> School algebra in the U.S. is institutionalized as two or more highly redundant courses, isolated from other subject matter, introduced abruptly to post-pubescent students, and often repeated at great coast as remedial mathematics at the post secondary level. Their content has evolved historically into the manipulation of strings of alphanumeric characters guided by various syntactical principles and conventions, occasionally interrupted by "applications" in form of short problems presented in brief chunks of highly stylized text.

En adoptant une approche didactique différente d'une arithmétique généralisée on dispose de tout l'espace curriculaire de l'école depuis le primaire jusqu'à la fin du secondaire.

L'idée d'étaler l'enseignement de l'algèbre sur plusieurs années laisse entrevoir la possibilité de définir un curriculum de mathématiques intégré, en exploitant les liens étroits qu'entretienent l'algèbre et l'arithmétique d'une part et l'algèbre et la géométrie de l'autre. Certains auteurs, comme Kaput et Bell, font remarquer qu'il est préférable de penser à l'algèbre non pas en tant qu'une matière à enseigner isolée, mais plutôt comme une manière de traiter les autres sujets mathématiques enseignés à l'école. En effet, selon Bell (1996), par exemple, le langage de l'algèbre, ses concepts et ses méthodes sont très utiles dans les autres branches des mathématiques. Kaput quant à lui, va jusqu'à dire :

> The key to algebra reform is to integrate algebraic reasoning across all grades and all topics – to "algebrafy" school mathematics. This integration solves three major problems:
>
> 1. It opens curricular space for the 21st century mathematics desperately needed at the secondary level, space currently locked up by the 19th century high-school curriculum now in place across the nation;
> 2. It adds a new level of coherence, depth, and power to school mathematics, both as a curriculum and as a habit of mind; and
> 3. It eliminates the most pernicious curricular element of today's school mathematics – late, abrupt, isolated, and superficial high-school algebra courses.
>
> (Kaput, 1998, p. 25)

Par ailleurs, l'étalement de l'enseignement de l'algèbre sur plusieurs années d'étude ne peut se faire que par le bas en commençant dès le primaire.

D'autres raisons peuvent justifier encore ce principe. Dans la dernière citation, Kaput en avance trois. Pour nous, la raison principale est liée à une conception constructiviste de l'apprentissage, laquelle pousse à prévoir d'abord une phase exploratoire des concepts avant leur introduction de manière formelle. Aussi, le primaire est le lieu privilégié pour initier les élèves de manière informelle à développer la notion générale d'opération, à généraliser, à abstraire, à modéliser, etc. De ce fait, le primaire aide à faire les étapes préliminaires des sujets algébriques qui seront abordés de manière plus formelle au secondaire.

Dans ce sens, l'expérience relativement récente de l'enseignement de la géométrie à l'école est pertinente. Selon Usiskin; dans les années 1960 on ne croyait pas à l'idée d'enseigner la géométrie depuis le primaire car celle-ci était conçue comme une matière formelle avec des raisonnements rigoureux. Actuellement, l'exemple de plusieurs pays du monde, montre que l'on peut enseigner aux élèves dès le primaire, des concepts géométriques réputés autrefois très difficiles, comme des transformations dans l'espace, du moment qu'on reste à un niveau concret. De plus, l'introduction formelle de ces concepts au secondaire est rendue plus facile.

Dans ce sens, dans la dernière proposition des standards du NCTM, les auteurs avancent :

> The study of patterns, functions, and algebra should begin informally in the early grades and develop in sophistication and breadth the years of schooling. Early experiences with concepts of patterns, function, and algebra can provide a substantial base of understanding to prepare students for the more intense focus on this area in late middle school and throughout secondary school. (NCTM, 1998, p.56)

À titre d'exemple, voici quelques suggestions concernant l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base.

Au primaire, on doit utiliser du matériel concret et semi-concret (illustrations) pour aider les élèves à approcher les concepts algébriques et à développer la pensée algébrique. L'utilisation d'un tel matériel procure aux élèves l'occasion d'opérer concrètement sur des objets, de raisonner sur ces opérations et de communiquer leurs raisonnements. À ces représentations physiques et imagées, on intégrera avant la fin de l'école primaire, les représentations tabulaires et graphiques. Au secondaire, on intègrera les représentations littérales et des notations algébriques de plus en plus complexes.

Durant toutes les années de l'éducation de base, l'enseignement de l'algèbre vise à développer chez les élèves :

- L'habileté à appréhender la notion générale d'opération ;

- L'habileté à penser analytiquement ;
- L'habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques ;
- L'habileté à utiliser le langage algébrique de manière formellement valide et fonctionnellement pertinente ;
- L'habileté à abstraire et à généraliser des structures algébriques; des structures de situations réelles ou mathématiques, des règles et des procédures algébriques.

Dans notre cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique, l'opération occupe une place fondamentale. Ce concept est tout aussi essentiel en arithmétique et on le retrouve aussi en géométrie. Aussi, dès le début de l'apprentissage de l'algèbre, on doit viser à développer chez les élèves la notion générale d'opération. C'est à travers cette notion que se réaliseront les apprentissages de l'algèbre. Picciotto (1995) lui aussi souligne l'importance du concept d'opération dans les mathématiques à l'école élémentaire et parle lui de développer chez les élèves «the operation sense».

> ✓ Operation sense is the key link between number sense, function sense, and the all-important symbol sense. Operation sense, therefore, deserves to be at the heart of early mathematics.
> ✓ A good way to support the shift towards understanding is with a tool-based pedagogy ; the use of manipulative, pictorial, and electronic thinking tools. The use of such tools does not guarantee understanding, but it does provide a good environment for discussion, communication, and reflection, and can play an important role in rethinking early mathematics, including the necessary changes in teacher education.
> ✓ The (enormously important) domain of arithmetic should not be the whole of elementary school math. An eclectic collection of topics drawn from recreational math and elsewhere can provide a rich source of contexts for worthwhile early mathematics.
> (Picciotto, 1995, p. 65)

Il explique le premier point ainsi :

> Conceptually, number sense, function sense, and symbol sense involve a substantial common component which I would to call operation sense. For example, take the sequence 5, 8, 11, 14, ...
> Number sense should include the ability to recognize repeated addition in this sequence, and its relationship to multiplication.
> Symbol sense should include the ability to express and recognize the same thing in a form such as $a + nd$, or in this case $5 + 3n$.

> Function sense should include the ability to recognize the relationship between that and the general linear function $y = mx + b$ – here $y = 3x + 5$. None of this is possible without a solid grasp of addition and multiplication, their structural relationship, and their uses in various applications. An understanding of operations is the foundation of number sense, symbol sense, and function sense. (Picciotto, 1995, p. 66).

Durant les premières années de l'apprentissage de l'algèbre, l'enseignement devrait aider les élèves à construire les significations de certaines opérations classiques, comme les opérations arithmétiques d'addition, de multiplication et leurs inverses, d'opérations «suivi de» dans un contexte de transformations de figures géométriques, ainsi que d'opérations de divers contextes. Il est important de ne pas se limiter aux opérations dans le cadre de l'arithmétique. La familiarisation avec ces différents types d'opérations se fait à travers le contact de l'élève avec des questions concernant les opérations dans de multiples situations algébrisables réelles ou mathématiques et de systèmes algébriques mathématiques (comme le système de nombres naturels) ou concrets (comme le jeu avec les interrupteurs de Dienes, par exemple). Progressivement, l'élève découvrira quelques aspects des espaces de calcul algébrique relatifs à des systèmes algébriques, mathématiques ou concrétisés avec lesquels il devient familier. Par exemple, l'élève sera amené à observer la propriété de la commutativité de l'addition et de la décrire dans ses mots ou à l'aide d'un matériel concret ou semi-concret. Ensuite, l'élève établira des relations entre diverses opérations, notamment les relations inverses, et identifiera les propriétés communes ou singulières de deux opérations ou plus, dans des systèmes algébriques mathématiques ou concrétisés. Cette étape préparera l'élève à établir les abstractions et formalisations ultérieures.

Durant les premières années du primaire, l'accent doit être mis sur l'élaboration du langage algébrique en tant que moyen pour décrire et interpréter des relations (régularités, modèles algébriques, etc.) et non en tant que moyen pour les transformer. Vers les dernières années du primaire, on peut commencer à initier l'élève à manipuler dans le médium papier-crayon des expressions algébriques et à transformer des équations simples après qu'il aura été initié à penser analytiquement.

Dès que l'élève peut décrire des relations à partir de situations qui lui sont familières, il est important de le mettre en contact avec de situations algébrisables et l'amener à les comparer et à identifier celles qui sont isomorphes. De telles activités le préparent à abstraire la notion d'équation, et à appréhender certains type de structures de situations algébrisables et plus tard de structures algébriques.

Grille de l'indicateur du principe 5

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que :

Niveau 0	L'enseignement de l'algèbre pour tous est concentré sur deux ou trois années d'étude seulement.
Niveau 1	L'enseignement de l'algèbre pour tous est étalé sur plusieurs années mais sans prévoir une phase préliminaire d'exploration.
Niveau 2	L'enseignement de l'algèbre pour tous est étalé sur plusieurs années, commence au primaire en prévoyant une phase préliminaire d'explotation.
Niveau 3	L'enseignement de l'algèbre est étalé sur toutes les années de la scolarité obligatoire en commençant dès la première année du primaire avec une longue phase préliminaire d'exploration.

Sens de l'indicateur

Le niveau 0 est celui où l'enseignement de l'algèbre ne se fait pas[87] ou se fait pendant deux ou trois années seulement de la scolarité obligatoire[88], soit au secondaire.

Le niveau 1 est le cas des curriculums où l'enseignement de l'algèbre est étalé sur plusieurs années, mais ne commençant qu'à la fin de l'école primaire ou le début du secondaire, de sorte que d'une part, on ne dispose pas suffisamment de temps pour prévoir une étape préliminaire d'exploration et que, d'autre part, les élèves ont suffisamment de connaissances en arithmétiques sur lesquelles on peut se baser pour introduire l'algèbre de manière formelle.

[87] Comme dans certain pays où la scolarité obligatoire ne s'étend pas au delà de l'école primaire.
[88] Comme c'était le cas tout récemment de certains curriculums aux États Unis.

En revanche, le niveau 2 est le cas des curriculums où l'enseignement de l'algèbre commence assez tôt à l'école primaire, de sorte que l'on prévoit une étape exploratoire d'initiation à l'algèbre longtemps avant l'introduction de l'algèbre de manière formelle.

Le critère du niveau 3 se différencie de celui du niveau 2 par le fait que l'enseignement de l'algèbre débute dès le début de l'école primaire et se poursuit jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire.

7.3.6 Sixième principe général

Le sixième principe général est relatif à la connexion du curriculum d'algèbre au reste des mathématiques.

Principe 6 (Connexion de l'algèbre avec le reste des mathématiques)
Le curriculum d'algèbre pour tous doit s'intégrer à celui des mathématiques.

Ce principe est tout à fait naturel et en cohérence avec le principe précédent. Il exprime à la fois le rôle important que doit jouer l'algèbre dans les mathématiques au niveau de l'école de base et l'idée que les mathématiques constituent un tout indivisible et non pas un ensemble d'îlots isolés les uns des autres. Par conséquent, on ne doit pas enseigner des sujets mathématiques de manière isolée les uns des autres, on doit exploiter le potentiel qu'offre l'algèbre à se connecter à d'autres branches mathématiques et vice-versa. La notion clé d'opération est un concept unificateur, on la retrouve au centre d'activités en algèbre, en géométrique, en analyse, en théorie des nombres, etc.

Avec l'arithmétique, l'algèbre présente de multiples connexions. Elle peut, d'une part, se baser sur l'arithmétique et, d'autre part, être utilisée comme outil pour étudier des questions sur les nombres. Ainsi le contexte du nombre donne de multiples occasions à l'élève à apprendre à généraliser, à identifier et à exprimer des relations (comme des régularités numériques), etc. Rappelons qu'à l'école primaire, le premier contact de

l'élève avec la notion d'opération a lieu dans un contexte numérique. Parallèlement à la construction du concept de nombre, l'élève s'approprie progressivement des schèmes de calcul avec les nombres, dégage des règles explicites de calcul sur les nombres avec les opérations arithmétiques d'addition, de multiplication et de leurs inverses; ceci lui permettra de forger une intuition de la notion générale d'opération, d'espace de calcul numérique et plus tard de structure algébrique.

Avec la géométrie aussi il existe de multiples possibilités de connexions. Dès son commencement, l'algèbre (d'al-Khawarizmi) se basait sur des arguments géométriques pour justifier les transformations algébriques. L'algèbre peut être considérée comme un outil pour traiter des sujets géométriques, en retour, la géométrie peut être utilisée pour approcher des notions algébriques. Par exemple, la notion de parallélisme de deux droites coplanaires peut être utilisée pour aider les élèves à conceptualiser la résolubilité d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Par ailleurs, une expression algébrique peut-être le modèle d'une situation géométrique, et, à son tour, cette dernière peut aussi être prise comme modèle de l'expression algébrique.

En résumé, l'algèbre présente un grand potentiel à se connecter à d'autres branches des mathématiques, car elle est la science de l'opération, si l'on peut dire. L'existence d'une opération, de quelque contexte que ce soit, ouvre la possibilité de faire de l'algèbre. Étant donné un système algébrique S (un ensemble d'objets mathématiques muni d'une opération), faire de l'algèbre c'est en fin de compte étudier la dynamique que crée l'opération à l'intérieur du système S. Les systèmes peuvent être constitués de nombres et des opérations classiques, d'objets géométriques, comme les polygones, et certaines transformations géométriques, comme les translations et les symétries; de parties d'un ensemble et des opérations de réunion, d'intersection, de différence, etc. Dans chacun de ces exemples, différentes activités pourraient être imaginées : étant donné un fait (propriété de l'opération, régularité, etc.) vérifié à partir de quelques objets particuliers du système, est-il toujours vérifié pour l'ensemble des objets de S ? trouver une inconnue d'un problème dans le contexte de S; exprimer un système de relations entre

des objets de S et le transformer en d'autres systèmes équivalents de relations; utiliser différents types de représentations, aller d'une représentation à l'autre; etc.

L'intégration de l'algèbre dans le curriculum de mathématiques n'est pas une tâche aisée. Il s'agit de voir comment certaines notions algébriques sont utilisées en mathématiques, avec quels aménagements et, à l'inverse, comment des problèmes posés en géométrie, par exemple, peuvent être au point de départ d'un travail sur de nouvelles connaissances algébriques.

Grille de l'indicateur du principe 6

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que:

Niveau 0	Dans l'enseignement de l'algèbre on fait rarement appel à des situations issues des contextes : nombre, géométrie et mesure, probabilité et statistique.
Niveau 1	Dans l'enseignement de l'algèbre on fait peu appel à des situations issues des contextes de nombre, géométrie et mesure, probabilité et statistique.
Niveau 2	Dans l'enseignement de l'algèbre on fait souvent appel à des situations issues des contextes de nombre, géométrie et mesure, probabilité et statistique.
Niveau 3	Dans l'enseignement de l'algèbre on fait souvent appel à des situations issues des contextes de nombre, géométrie et mesure, probabilité et statistique, que ce soit dans l'application de l'algèbre ou dans la construction du savoir algébrique.

Sens de l'indicateur

Le niveau 0 est le cas des curriculums d'algèbre qui sont isolés des autres sujets mathématiques enseignés à l'école. Dans de tels curriculums, on utilise quelques fois des contextes non algébriques mais uniquement dans des activités d'application de l'algèbre de fin de chapitre.

Le niveau 1 est celui ou l'on peut utiliser des contextes mathématiques énoncés dans le critère mais de manière peu fréquente et disparate.

Le niveau 2 est le cas des curriculums qui exploitent les contextes mathématiques énoncés dans le critère dans chaque sujet algébrique enseigné.

Le critère du niveau 3 est le même que celui du niveau 2 avec en plus l'exigence que les contextes mathématiques énoncés dans ces critères soient utilisés à la fois dans les situations de construction du savoir algébrique et dans les situations d'application de l'algèbre.

7.3.7 Septième principe général

Ce septième principe est relatif à la connexion de l'algèbre à d'autres domaines.

Principe 7 (Connexions de l'algèbre avec d'autres domaines)

Le curriculum d'algèbre pour tous doit avoir de multiples connexions avec d'autres disciplines scolaires, avec la réalité environnante de l'enfant et avec d'autres domaines où les mathématiques sont utiles.

Comme pour le principe précédent, l'algèbre possède un grand potentiel à être connectée aux disciplines enseignées à l'école, comme les sciences, la physique et la géographie, à cause du fait que beaucoup de phénomènes issus de ces contextes peuvent être modélisés algébriquement. Cette intégration peut avoir lieu dans deux sens inverses selon que l'algèbre est utilisée comme outil d'étude ou comme objet d'étude. Par exemple, les vecteurs peuvent servir pour étudier la notion de force en physique. À l'inverse, les questions suscitées par la représentation des forces en physique peuvent servir comme moyen pour approcher la notion de vecteur en algèbre.

L'un des corollaires de ce principe est d'utiliser des contextes des disciplines scolaires dans l'étude de l'algèbre. Ainsi, ces contextes peuvent être issus des matières scientifiques, de la biologie, des sciences naturelles, de la physique, de la technologie ou des sciences humaines, comme l'histoire, la géographie, etc. L'utilisation de tels contextes pour appliquer le savoir algébrique, mais aussi comme support dans sa

construction, facilite l'apprentissage de l'algèbre, le rend signifiant pour les élèves et favorise les transferts ultérieurs de connaissances algébriques.

Ce principe traduit un des buts de l'éducation mathématique pour tous que nous avons rappelé dans la section 4.3, à savoir : *faciliter à tous les élèves l'apprentissage et la compréhension d'autres disciplines scolaires.*

Par ailleurs ce principe postule aussi que le curriculum d'algèbre doit être connecté à d'autres domaines de la vie sociale et de la réalité environnante de l'enfant où les mathématiques sont utilisées. On retrouve dans la vie quotidienne de multiples contextes où l'algèbre peut être utilisée (contexte financier, sondages, économie, démographie, nature, etc.). En particuliers, l'algèbre peut être utilisée pour comprendre des phénomènes et résoudre des problèmes issus de la vie sociale. Dans ce sens, ce principe traduit un autre but de l'éducation mathématique pour tous, *préparer les citoyens en tant qu'utilisateurs des mathématiques pour qu'ils soient des acteurs sociaux et économiques éclairés.* Insistons ici encore sur le fait que l'utilisation de tels contextes doit avoir lieu tout au long de l'apprentissage de l'algèbre de manière continue et récursive.

Cette manière d'intégrer le curriculum d'algèbre peut s'avérer être un problème difficile. Elle semble être à l'opposée d'une pratique curriculaire classique : la maîtrise des méthodes et des concepts d'abord, les applications ensuite. Le savoir construit par les élèves n'est alors fonctionnel que dans des situations scolaires stéréotypées et le problème des transferts des connaissances demeure entièrement posé. C'est que, selon nous, les domaines de fonctionnalité du savoir, n'ont pas été pris en compte lors de la construction du savoir. En intégrant les contextes d'utilisation du savoir algébrique dès l'apprentissage de ce dernier, ce moyen permettrait, nous semble-t-il, de faciliter ultérieurement les transferts de connaissances. Les domaines de fonctionnalité du savoir algébrique découlent des quatre buts de l'enseignement de l'algèbre énumérés dans la section 4.3, à savoir :

- Faciliter à l'élève l'apprentissage et la compréhension d'autres disciplines scolaires.

- Préparation du citoyen en tant qu'utilisateur des mathématiques pour qu'il soit un acteur social et économique éclairé;
- Préparation de l'enfant à de futures carrières professionnelles;
- Contribuer au développement personnel et culturel de tous les élèves, en faisant apprécier les mathématiques en tant qu'activité intellectuelle riche, stimulante et attrayante et en tant que discipline scientifique ayant ses propres caractéristiques d'esthétique et de beauté.

Il nous semble alors important que dans les activités proposées aux élèves en algèbre, on utilise divers contextes issus de disciplines scolaires (sciences, physique, géographie, etc.), du monde social (situation de la vie quotidienne, sondages, économie, technologie, finances, etc.) ; du monde des carrières (ingénierie, aviation, agriculture, musique, etc.) et du monde des arts et de la culture et des activités ludiques (histoire, musiques, jeux, etc.). À cause des aspects modélisation et langage de l'algèbre, l'élève peut ainsi acquérir un moyen de décrire et comprendre des aspects de son monde environnant.

Grille de l'indicateur du principe 7

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que:

Niveau 0	Dans l'enseignement de l'algèbre on utilise rarement des contextes issus de domaines non mathématiques.
Niveau 1	Dans l'enseignement de l'algèbre on utilise des contextes de peu de domaines non mathématiques.
Niveau 2	Dans l'enseignement de l'algèbre on utilise, de manière continue et récursive, des contextes issus des disciplines scolaires, de l'univers social, de l'univers des carrières, de l'univers des arts et de la culture et des activités de nature ludique.
Niveau 3	En plus du critère du niveau 2, l'utilisation de l'algèbre dans ces divers types de domaines est un objectif d'apprentissage visé par le curriculum.

Sens de l'indicateur

Les critères des niveaux 0, 1 et 2 sont analogues à ceux de l'indicateur du principe 6 en remplaçant les contextes mathématiques de nombres, géométrie, probabilité et

statistiques par ceux de disciplines scolaires non mathématiques, domaines de l'univers social, des carrières, des arts et de la culture et des activités de nature ludiques.

Pour le critère 3 nous exigeons que des compétences d'applications de l'algèbre à ses domaines soient pris comme objectif d'apprentissage.

7.3.8 Huitième principe général

Ce huitième principe porte sur les thèmes mathématiques à privilégier dans l'enseignement de l'algèbre à tous.

Principe 8 (Thèmes d'étude)
Le curriculum d'algèbre pour tous doit privilégier l'étude des thèmes suivants : *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme, incertitude.*

L'apprentissage de l'algèbre doit porter sur un ensemble de thèmes mathématiques, spécialement ceux cités dans ce principe. Ces thèmes représentent des idées mathématiques importantes aussi bien dans les mathématiques elles-mêmes que dans ses applications. Leur étude offre l'opportunité aux élèves d'établir des connections entre l'algèbre et d'autres disciplines.

Cette idée est partagée par un ensemble d'éducateurs. Le groupe du NCTM, par exemple, préfère parler de *contextes* (contextual settings) et justifie leur intérêt ainsi :

> Among the important goals of the NCTM Standards is mathematics be viewed as problem solving, reasoning, communications, and making connections. Since these thinking and reasoning must be about something, the Standards also promote building student's understanding of concepts through activities embedded in contextual settings. Contexts taken from the setting of growth and change, size and shape, data and uncertainty, number, and patterns and regularity, are productive sources to focus algebraic thinking. This collection of contextual settings, (...) provides an opportunity for students to make connections between algebra and other disciplines, and to see how algebra helps make sense of patterns or regularities in such diverse areas as biology or economics. (NCTM, 1995, p. 14)

Par exemple, ajoutent ces auteurs, l'étude de l'accroissement de la population est un contexte qui permet l'étude du thème d'accroissement; trouver le nombre d'autobus pour le transport d'un grand groupe de personnes est un contexte qui permet l'étude du thème de la quantité.

Pour sa part Kaput, qui préfère utiliser le terme "strand", défend une idée analogue :

> With Steen and others, I suggest a strand organization, where the major ideas weave through many grade levels, frequently interweaving with one another to create a rich fabric, but one that has a direction, a natural flow, from the wide watershed of concrete experience to generalizations and abstractions, from informal and language based representing to more formal representations. Filters are usually built using layers, while strands provide a natural flow, gradually drawing into mathematics even more diverse experience. (...) [T]he new ingredient, beyond stark necessity, is increased emphasis on the need for vertical coherence and integration among strands.
> [...] Some very thoughtful mathematicians have already offered considered suggestions (...) : Quantity, Shape, Uncertainty, Dimension, Change. Interestingly, algebra does not appear in the list, but, rather, is implicitly included as an expressive language in the development of the strands listed. Whatever the strands, they should begin in elementary school and contribute to a core mathematical experience of ALL students up throughout the first year of secondary school, with variations expected and encouraged. For the later years of secondary school, we should expect real differentiation and choice. (Kaput, 1994)

Il nous semble que ces thèmes d'études permettraient de donner une cohérence au curriculum et d'initier les élèves aux grandes idées mathématiques qui se retrouvent dans bon nombre d'activités humaines.

Les thèmes du *nombre*, de la *quantité*, voire même de la *forme* ont été assez abordés dans les curriculums traditionnels d'algèbre. Les thèmes de *modèle et régularité* sont relativement plus récents et sont sujets d'étude dans les curriculums de quelques pays. En revanche, le thème *d'accroissement et de variation*, faisait partie traditionnellement de l'analyse. Sa considération dans l'enseignement de l'algèbre, notamment dans les premières classes, est très récente. Un important facteur en faveur de cette reconsidération, affirme Kaput (1994), est la capacité de la technologie à fournir des solutions numériques et graphiques aux équations, de fournir des informations sur le

taux de variation sous forme graphique ou numérique. C'est, nous semble-t-il, ce type de considération qui est derrière l'intérêt manifesté actuellement par de nombreux éducateurs pour une approche fonctionnelle de l'algèbre de l'école.

De plus, cette idée de construire le curriculum de mathématiques en fonction d'un nombre de thèmes d'étude et non de branches mathématiques comme l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie permettrait de mieux assurer l'intégration interne du curriculum. Cela ne signifie pas que les concepteurs de programmes ne devraient pas penser en termes de ces disciplines. Les thèmes d'étude permettent de donner un sens aux activités proposées aux élèves et, avec les différents aspects de ces disciplines, ils permettent de structurer le contenu mathématique à enseigner.

Grille de l'indicateur du principe 8

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que:

Niveau 0	Les thèmes: *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme; incertitude* ne sont pas abordés en tant qu'objets d'étude dans l'enseignement de l'algèbre.
Niveau 1	Quelques uns des thèmes *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme; incertitude* sont abordés en tant qu'objets d'étude dans l'enseignement de l'algèbre.
Niveau 2	Tous les thèmes *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme; incertitude* sont abordés en tant qu'objets d'étude dans l'enseignement de l'algèbre.
Niveau 3	Tous les thèmes *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme; incertitude* sont abordés en tant qu'objets d'étude dans l'enseignement de l'algèbre. De plus, un certain niveau de compréhension de ces thèmes est explicitement un objectif d'apprentissage.

Sens de l'indicateur

Le niveau 0 est le cas d'un curriculum où l'étude de ces thèmes se trouve ignoré dans l'enseignement de l'algèbre. C'est le cas de curriculums traditionnels de l'algèbre : bien

que l'algèbre soit utilisée pour l'étude de certains aspects du nombre ou de la forme, cela n'est pas systématique et les autres thèmes ne sont pas abordés.

Le niveau 1 correspond aux curriculums qui omettent de prendre comme objet d'étude au moins un des thèmes cités dans le critère.

Le niveau 2 est celui où tous les thèmes énumérés dans le critère sont des objets d'étude, dans l'enseignement de l'algèbre. Un tel curriculum satisfait normalement au principe 5 car en abordant l'étude de tous ces thèmes, l'enseignement de l'algèbre est intégré à celui de l'arithmétique, de la mesure, de la géométrie, des probabilités et des statistiques.

Le critère du niveau 3 est le même que celui du niveau 2 avec en plus l'exigence que des compétences relatives à la compréhension de ces thèmes mathématiques d'étude soient explicitées dans le curriculum.

7.4 ÉLABORATION OU ÉVALUATION D'UN CURRICULUM D'ALGÈBRE DANS L'ÉDUCATION DE BASE À L'AIDE DES PRINCIPES GÉNÉRAUX ET DES INDICATEURS

Les principes que nous venons de présenter peuvent servir à la fois pour analyser des curriculums existants d'algèbre dans l'éducation de base et chercher à les améliorer ou pour en élaborer de nouveaux. Toutefois, rappelons qu'ils ne concernent que le curriculum officiel d'algèbre, dans sa globalité, sans faire de distinction de niveaux d'étude.

Un travail important reste alors à faire pour élaborer des indicateurs et des instruments d'analyse plus précis afin d'évaluer des manuels, et le curriculum d'algèbre enseigné ou appris. De tels indicateurs et instruments d'analyses peuvent, également, servir à construire le curriculum d'algèbre à enseigner dans l'éducation de base. À cet effet, il

faut élaborer des instruments et une méthode plus raffinés pour élaborer des curriculums d'algèbre en tenant compte du contexte local de réalisation du curriculum.

Par ailleurs, il est clair que la manière d'interpréter et d'appliquer certains de nos principes va varier en fonction de l'année d'étude, de la durée de l'éducation de base, du degré de préparation des enseignants et également en fonction des moyens disponibles. La construction d'un curriculum effectif d'algèbre est une entreprise considérable. L'implantation d'un tel curriculum se fait sur une longue période et en plusieurs étapes. Pour concrétiser par exemple le principe de l'étalement de l'enseignement de l'algèbre sur plusieurs années d'étude en commençant dès le primaire, il faut beaucoup de réflexions et de travail pour définir ce qu'il faut enseigner chaque année en algèbre tout en assurant une cohérence longitudinale du curriculum; il faut aussi préparer les enseignants et le matériel didactique, notamment les manuels. Nous ne pouvions pas, dans le cadre de cette thèse, tenir compte de tous ces détails, surtout que nous avons choisi de faire des propositions qui pourraient être utilisées dans n'importe quel pays. Comme on le voit, notre recherche ouvre la voie à un large chantier de travaux de recherche et de développement.

En apportant des informations sur un seul principe, chacun des indicateurs fournit des éclairages sur aspect particulier du curriculum. Aussi, c'est l'ensemble de tous les indicateurs qui peut fournir une vision globale du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Toutefois, quand peut-on dire qu'un curriculum d'algèbre est acceptable dans l'éducation de base ? Est-ce que c'est dans le cas où tous les principes sont fortement concrétisés, c'est-à-dire dans le cas où tous les indicateurs sont au niveau 3 ? Nous pensons qu'une telle situation est impensable en théorie et impossible en pratique.

En effet, les principes n'étant pas complètement isolés les uns des autres, ils ne peuvent pas être tous fortement concrétisés, car le fait de donner beaucoup d'importance à la concrétisation d'un principe aura pour conséquence d'en limiter celle d'un autre. Par exemple, si l'on choisit de construire un curriculum fortement intégré avec des

disciplines scolaires et d'autres domaines (principe 7), on doit alors utiliser fréquemment des activités de modélisation; par conséquent, dans l'approche didactique «mixte» utilisée, l'influence de l'approche «modélisation» est plus grande que celle des trois autres. Aussi, l'approche didactique «mixte» ne peut être intégrée de manière fortement cohérente, c'est-à-dire que l'indicateur du principe 3 ne peut être au niveau 3.

Également, il est impossible en pratique de réaliser un curriculum concrétisant fortement tous nos principes, car il existe une foule de contraintes curriculaires qui obligent à faire certains compromis. Il faut en effet tenir compte du degré de préparation des enseignants. Comment, par exemple, viser le développement de la pensée algébrique (principe 4) sans une bonne préparation des enseignants surtout ceux du primaire (à ce sujet, la question de la spécialisation des enseignants de mathématiques au primaire se pose avec acuité)? Également, il faut tenir compte de la disponibilité de manuels et de matériel didactique. Par exemple, l'utilisation d'outils technologiques semble inévitable, à cause des aspects «modélisation» et «fonction» de l'algèbre. Il faut aussi tenir compte de caractéristiques du contexte de réalisation du curriculum. Par exemple, dans certains pays où la scolarité obligatoire s'achève à la fin de l'école primaire, certains de nos principes peuvent ne pas rencontrer les priorités prises en matière d'éducation de base.

En somme, dans la construction ou l'amélioration d'un curriculum, la décision de choisir le degré et la manière de concrétiser nos principes varie selon le contexte.

7.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté huit principes généraux qu'un curriculum d'algèbre dans l'éducation de base doit satisfaire, chacun d'eux étant accompagné par un indicateur. Ces principes et leurs indicateurs offrent des instruments pouvant servir à évaluer des curriculums existants et chercher à les améliorer. Nous considérons que nous avons répondu à notre deuxième question de recherche: Sur quels principes

pourrait-on se baser pour évaluer ou construire un curriculum d'algèbre véritablement adapté à l'éducation de base ? malgré tout ce qui nous reste à faire.

À titre d'illustration, la figure 7.1 représente un modèle de curriculum satisfaisant à nos principes généraux.

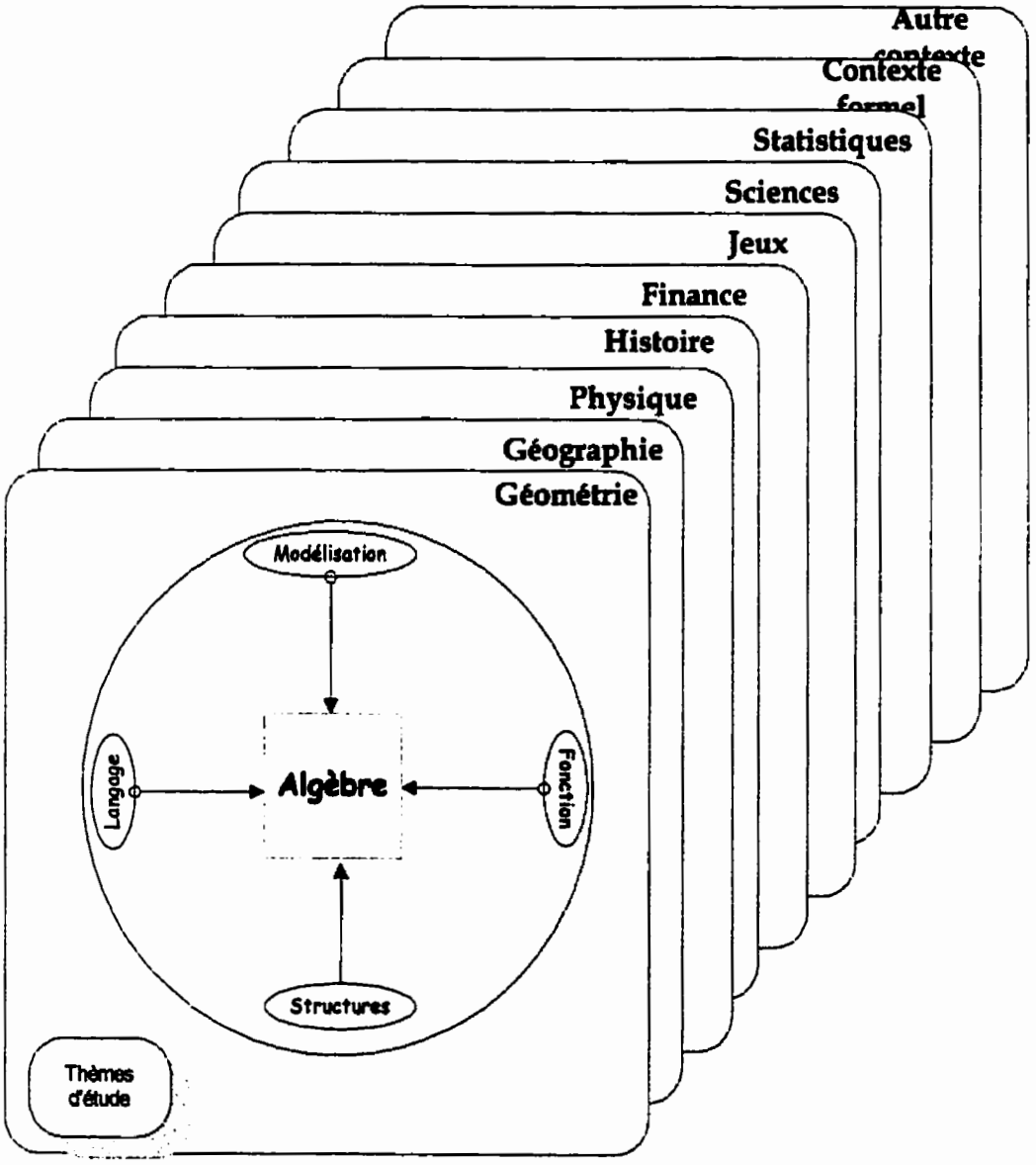


Figure 7.1 : Curriculum multi-intégré d'algèbre pour tous

Ce n'est pas une tâche facile que de concrétiser tous nos principes. Par exemple, il faut réaménager le curriculum des mathématiques en intégrant l'algèbre mais sans

hypertrophier le contenu mathématique à enseigner. Une autre difficulté est de trouver une intégration équilibrée des quatre différentes approches de l'algèbre. Enfin, un autre exemple de difficulté est inhérent au fait de prendre comme objectif d'apprentissage le développement de la pensée algébrique : comment évaluer le degré de développement d'une composante de la pensée algébrique chez les élèves ?

Comme nous l'avons souligné précédemment, nos indicateurs ne peuvent pas, en théorie et en pratique, être tous au niveau maximum. Le niveau de concrétisation de nos principes et le choix de ceux à prioriser en particulier relèvent de décisions qui varient selon le contexte du curriculum.

Chapitre 8

Synthèse et conclusions générales

8.1 SYNTHÈSE

Notre travail s'inscrit dans la problématique de l'enseignement de l'algèbre pour tous. Suite aux changements importants survenus dans les conditions de l'enseignement des mathématiques à l'école, un grand nombre de didacticiens des mathématiques s'entendent sur la nécessité de réformer en profondeur les curriculums actuels d'algèbre, un sujet réputé aride et difficile dont l'enseignement à la masse présente un défi accru. Lorsque nous avons entrepris ce travail, des points de vue divers, hétéroclites et parfois inconciliables, se manifestaient dans la communauté des chercheurs concernant l'enseignement de l'algèbre et il nous apparaissait essentiel de mener des recherches en vue de repenser la place et la contribution de l'algèbre dans l'éducation de base. Nous avons ainsi été amené à retenir l'objectif suivant pour notre thèse :

Mener une étude approfondie visant à reconceptualiser le curriculum de l'algèbre pour tous dans l'éducation de base.

Pour mener une telle étude, au lieu de partir des curriculums actuels d'algèbre et de chercher à les améliorer sous différents rapports, nous nous sommes proposé de faire provisoirement table rase de la réalité actuelle et de mener d'abord une réflexion en profondeur sur les aspects mathématiques, épistémologique et didactique de l'algèbre.

Comme nous ne voulions pas partir d'une signification *a priori* de l'algèbre, nous avons entrepris notre travail, dans le chapitre 2, par l'étude du développement historique de l'algèbre. Nous avons commencé par examiner deux interprétations de l'évolution historique de l'algèbre. La première est celle popularisée par Nesselman; nous avons expliqué qu'elle décrit en fait l'évolution du symbolisme algébrique et qu'elle ne met pas en évidence des étapes importantes du développement de l'algèbre. La seconde est due à Piaget et Garcia; nous avons souligné son mérite de bien mettre en évidence le

caractère essentiel que joue l'opération dans le développement et l'appréhension de l'algèbre. Ensuite, nous avons proposé un découpage original du développement historique de l'algèbre en huit grandes étapes. La première est celle du début de l'algèbre en tant que discipline mathématique indépendante avec al-Khawarizmi. Au cours de cette période, l'algèbre apparaît comme la théorie des équations linéaires et quadratiques à une seule inconnue, et du calcul élémentaire sur les binômes et trinômes associés (calcul algébrique), sans que soit encore formulée l'idée de polynôme en général. Nous avons souligné que la tendance à chercher des méthodes générales (algorithmes) de résolution de problèmes a amené al-Khawarizmi à raisonner d'une manière analytique et à dégager des concepts généraux comme ceux *d'inconnue* et *d'équation*. Dans la seconde grande étape de l'évolution de l'algèbre, celle-ci apparaît comme une arithmétique des inconnues, où on assiste à la constitution de l'algèbre des polynômes. Le calcul algébrique se trouve alors prolongé en un calcul sur les expressions polynomiales à coefficients rationnels positifs. Dans la troisième étape, l'algèbre apparaît comme la théorie des équations algébriques où on note une grande influence du courant géométrique. La quatrième période retenue est marquée par l'élargissement du domaine d'application du calcul algébrique à de nouvelles catégories de nombres. En la décrivant, nous avons noté la relation dialectique entre le développement du calcul algébrique et les extensions successives de systèmes de nombres ainsi que le rôle moteur de la pensée analytique dans le développement de l'algèbre. Durant la cinquième étape, le calcul algébrique acquiert une épaisseur syntaxique qui augmente considérablement sa puissance. L'idée clé, celle consistant à noter par des lettres même les nombres connus, est manifestement de nature analytique. Mais, en comparaison avec l'idée sous-tendant la représentation de l'inconnue par une lettre, le courant s'inverse. En effet, au lieu d'opérer sur une inconnue comme si elle était connue, on opère sur une quantité connue comme si elle était inconnue ! L'algèbre devient une sorte d'arithmétique avec des lettres qui représentent des quantités arbitraires. Jusque là, on opérait sur des grandeurs connues ou inconnues selon des règles fixes et bien définies, à l'image de celles régissant les

systèmes classiques de nombres. Dans la sixième étape retenue, on voit apparaître des algèbres non traditionnelles, dans le sens où les propriétés des opérations ne satisfont plus au même système de règles que celles des systèmes de nombres classiques (entiers, rationnels, réels ou complexes). Durant la septième étape, on voit apparaître la notion de structure algébrique. Les algébristes commencent à comprendre qu'en algèbre, ce sont les propriétés des opérations qui comptent et non la nature des objets sur lesquelles elles sont définies. Dans la huitième étape, la signification de l'algèbre qui domine est celle de l'étude de structures algébriques. Le calcul algébrique signifie alors un calcul sur des expressions symboliques qui n'ont aucune ontologie et dont les règles de calcul sont basées sur les axiomes définissant une structure algébrique.

En nous basant principalement sur ces données historiques, ainsi que sur des réflexions personnelles, nous avons exposé notre vision de l'algèbre et de la pensée algébrique dans le chapitre 3. Nous avons commencé par expliquer pourquoi il faut insister à la fois sur l'algèbre et sur la pensée algébrique. Nous concevons la première comme un type d'activités mathématiques et la seconde comme un ensemble d'habiletés intellectuelles qu'on y utilise. Nous avons ensuite défini les principaux termes et les notions que nous allions utiliser par la suite pour présenter notre modèle de l'algèbre et de la pensée algébrique. Nous avons commencé par préciser la notion d'opération, notion à partir de laquelle nous avons construit notre cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique. Cette notion occupe une place fondamentale en algèbre. En considérant les mathématiques comme une activité, l'algèbre est ce type particulier d'activités mathématiques où interviennent des opérations, pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, translation, etc.), mais en restant dans le cadre de processus finis seulement. Cette vision de l'algèbre est large, elle inclut une grande part de l'arithmétique et intègre des parties de l'analyse mathématique et de la géométrie. Ensuite, nous avons rappelé les notions de système algébrique, de structure algébrique et nous avons défini celle d'espace de calcul algébrique. Cette dernière est l'une de nos constructions théoriques originales. Étant donné un système algébrique E, nous avons défini un espace de calcul algébrique, associé à E, comme un

système de représentation de E formé de variables, d'expressions, d'équations et de formes propositionnelles de domaine E ainsi que des règles d'inférence logique. La manipulation du calcul algébrique a lieu dans un tel espace de calcul. Après les précisions terminologiques, nous avons présenté un modèle original intégrant l'algèbre et la pensée algébrique (M.I.A.P.A). Ce modèle constitue la plus importante élaboration théorique de notre travail. Nous l'avons construit à la suite d'analyses épistémologique et mathématique, et notamment en nous appuyant sur les aspects essentiels de l'algèbre et de la pensée algébrique tels qu'ils ressortent de notre revue de l'histoire de l'algèbre. Dans ce modèle original, l'algèbre et la pensée algébrique sont représentées comme les deux faces d'une même médaille. L'algèbre apparaît comme un type d'activités mathématiques et la pensée algébrique comme un ensemble d'habiletés intellectuelles intervenant dans ces activités. La face algèbre est formée de trois composantes : 1) Construction et interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques ; 2) manipulation d'expressions algébriques en suivant des règles prédéfinies et 3) élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.). Ces trois composantes sont toutes essentielles, indissociables et complémentaires compte tenu de ce qu'a été l'algèbre dans son histoire et de ce qu'elle est de nos jours. Elles offrent une vision synthétique mais non étriquée de l'algèbre. En effet, toute signification de l'algèbre doit contenir l'aspect manipulation d'expressions algébriques, l'aspect modélisation algébrique et l'aspect étude de structures algébriques ou de structures de situations algébrisables. Chacun de ces aspects est intégré exclusivement dans une (et une seule) des composantes de la face algèbre du M.I.A.P.A. L'autre côté de la médaille du M.I.A.P.A. représente la face pensée algébrique. Elle est formée de quatre composantes : 1) habileté à penser analytiquement; 2) habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques; 3) habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies et 4) habileté à généraliser et à abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des

structures de situations réelles ou mathématiques. Nous avons mis l'habileté à penser analytiquement au centre pour souligner le caractère analytique de la pensée algébrique et le rôle crucial qu'a joué la pensée analytique à tous les niveaux du développement historique de l'algèbre. C'est cet aspect qui distingue le plus la pensée algébrique de la pensée arithmétique. Chacune des trois autres composantes de la face pensée algébrique indique une habileté intellectuelle caractéristique quand on fait de l'algèbre dans le cadre de l'un des aspects de la face algèbre. Le lien intime qui existe entre l'algèbre et la pensée algébrique dans M.I.A.P.A est ainsi tout à fait manifesté. À notre connaissance, aucun autre auteur ne caractérise aussi clairement l'algèbre et la pensée algébrique, en les distinguant l'une de l'autre et en précisant explicitement les liens qui les unissent. Par rapport à notre M.I.A.P.A, toutes les propositions concernant la nature de l'algèbre et de la pensée algébrique restent partielles, mettant l'accent sur un aspect particulier de l'algèbre ou de la pensée algébrique ou omettant un de leurs aspects essentiels. Dans ce sens, nous avons vu que Lins a uniquement caractérisé explicitement la pensée algébrique, et en plus, sa caractérisation reste limitée. Cependant, il a le mérite d'avoir bien mis en évidence l'aspect analytique de la pensée algébrique. Le groupe AWG du NCTM, en revanche, a identifié les aspects essentiels de l'algèbre, mais faute d'un cadre théorique, il n'est pas arrivé pas à expliciter clairement les aspects essentiels de la pensée algébrique et n'a mis en évidence que l'aspect généralisation, auquel il a accordé une importance exagérée, à notre sens. La proposition de Kaput est la plus complète. Elle propose à la fois des aspects essentiels de l'algèbre et de la pensée algébrique que notre modèle intègre bien, mais elle ne souligne pas l'importance de l'aspect analytique de la pensée algébrique. De plus, Kaput ne semble pas encore clarifier le lien qui existe entre l'algèbre et la pensée algébrique; tantôt il décrit ces aspects comme ceux de l'algèbre et tantôt comme ceux de la pensée algébrique.

Dans le chapitre 4, nous avons complété la présentation du cadre conceptuel de la thèse, en précisant la notion d'éducation de base, en présentant les objectifs de

l'éducation mathématique de base et en soutenant que l'algèbre et la pensée algébrique sont des composantes incontournables de cette dernière.

Dans une deuxième étape du travail, au chapitre 5, nous avons précisé la notion de curriculum et présenté un modèle de curriculum d'algèbre dans l'éducation de base à partir d'un modèle de curriculum proposé par Eraut. Puis nous avons précisé l'objectif de la thèse à l'aide des deux questions de recherches suivantes:

- *Quelle approche didactique utiliser dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base ?*
- *Sur quels principes peut-on se baser pour évaluer ou construire un curriculum d'algèbre pour tous véritablement adapté à l'éducation de base ?*

et avons clarifié la méthode retenue pour répondre à chacune de ces deux questions.

Dans la troisième et dernière étape de la thèse, nous avons élaboré des réponses à nos deux questions de recherche. Dans le chapitre 6, nous avons étudié la première :

Quelle approche didactique utiliser dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base ?

Après avoir présenté les approches didactiques «langage», «structures», «modélisation» et «fonctions» pouvant être transposées du modèle M.I.A.P.A., nous avons soutenu que dans l'enseignement de l'algèbre dans l'éducation de base, il y a lieu d'utiliser *une approche didactique «mixte», intégrant de manière cohérente les quatre approches précédentes.*

Ensuite, nous avons analysé les approches utilisées traditionnellement dans l'enseignement de l'algèbre : «arithmétique généralisée», «langage» et une approche basée sur les extensions successives des systèmes de nombres. Nous avons également analysé des propositions récentes pour l'enseignement de l'algèbre, notamment celles qui sont présentées dans l'ouvrage collectif: *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching* (Bednarz, Kieran et Lee , 1996), une approche proposée par Chevallard, une autre par Kaput et deux propositions récentes du NCTM, soit celle de son groupe de travail sur l'algèbre AWG et celle qui ressort du document *Principles and Standards for School Mathematics* de 2000. Les points de vue de la plupart de ces auteurs vont dans le même sens que le nôtre, à savoir : dans l'enseignement de l'algèbre, il faut tenir compte

simultanément de plusieurs aspects de l'algèbre. Également, l'analyse de toutes ces propositions nous a permis, d'une part, de confirmer la pertinence des aspects «langage», «structures», «modélisation» et «fonctions» dans l'enseignement de l'algèbre à l'école de base et, d'autre part, de constater qu'il n'est proposé aucun autre aspect essentiel de l'algèbre dont nous n'ayons pas tenu compte dans notre modèle M.I.A.P.A. Par ailleurs, ces propositions nous ont apporté des éclairages intéressants sur certains aspects de l'algèbre et de la pensée algébrique et un certain nombre d'idées et de modalités applicables dans l'enseignement de l'algèbre. Cependant, il nous a semblé que chacune de ces propositions, ou bien n'explore qu'un aspect particulier de l'algèbre (comme le cas de toutes celles présentées dans l'ouvrage collectif *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching* (Bednarz, Kieran, Lee ; 1996), ou bien tient compte de tous ses aspects importants mais en présentant quelques lacunes (comme c'est le cas des propositions de Kaput et du NCTM).

En revanche, notre cadre conceptuel concernant l'algèbre et la pensée algébrique nous a permis souvent d'éviter certaines confusions et de ne pas trop élargir inutilement la vision de l'algèbre jusqu'à diluer complètement sa signification. Par exemple, pour nous une activité mathématique où une opération n'est pas en jeu n'est pas une activité algébrique; en algèbre on reste dans le cadre des processus finis seulement, ce qui élimine l'étude de plusieurs fonctions en algèbre. De plus, notre cadre conceptuel précise le sens des termes et concepts utilisés tout en distinguant clairement l'algèbre de la pensée algébrique.

Dans le chapitre 7, en réponse à la deuxième question de recherche : *Sur quels principes pourrait-on se baser pour évaluer ou construire un curriculum d'algèbre véritablement adapté à l'éducation de base ?*, nous avons présenté huit principes généraux, chacun étant accompagné d'un indicateur qui le rend plus opérationnel. Pour les besoins de notre travail, nous avons choisi d'utiliser des indicateurs de nature qualitative accompagnés d'une échelle à quatre niveaux de valeurs. Chacun de ces niveaux correspond à une interprétation du degré de concrétisation d'un principe dans le curriculum.

Principe 1	(Un curriculum pour tous) Le curriculum d'algèbre doit s'adresser à *tous* les élèves durant la scolarité obligatoire.

Grille de l'indicateur du principe 1

	L'analyse des textes présentant le curriculum montre que le principe de rendre l'enseignement de l'algèbre accessible à tous les élèves est :
Niveau 0	Non cité, même de manière implicite.
Niveau 1	Cité explicitement au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, mais ne se répercute pas au niveau des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques et de l'évaluation.
Niveau 2	Cité explicitement au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques, de l'évaluation; mais sans en fournir explicitement des mesures concrètes ni en l'illustrant à l'aide d'exemples détaillés.
Niveau 3	Cité explicitement au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques, de l'évaluation; en le précisant des mesures pour le concrétiser et en l'illustrant à l'aide d'exemples détaillés.

Principe 2	(Complémentarité algèbre - pensée algébrique) Le curriculum d'algèbre doit accorder une importance aussi bien à l'acquisition de savoirs et savoir-faire en algèbre qu'au développement de la pensée algébrique chez les élèves.

Grille de l'indicateur du principe 2

	Une analyse des textes présentant le curriculum laisse voir que celui-ci vise à donner de l'importance aussi bien à l'acquisition de savoir et savoir-faire qu'au développement de la pensée algébrique.
Niveau 0	Aucune allusion à ce principe.
Niveau 1	Le principe figure de manière explicite au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques mais non au niveau des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques

	et de l'évaluation.
Niveau 2	Le principe figure de manière explicite au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques, de l'évaluation; mais sans en fournir explicitement des mesures pour le concrétiser ni d'exemples pour l'illustrer.
Niveau 3	Le principe figure explicitement au niveau des buts de l'enseignement des mathématiques, des objectifs généraux et spécifiques, des moyens et orientations méthodologiques, de l'évaluation; de plus, les textes précisent des mesures pour le concrétiser et les illustrent par des exemples détaillés.

Principe 3	(Multiplicité des aspects de l'algèbre) Le curriculum d'algèbre pour tous doit tenir compte de toutes les composantes de la face algèbre du M.I.A.P.A., à savoir 1) Construction et interprétation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques ; 2) manipulation d'expressions algébriques en suivant des règles prédéfinies et 3) élaboration et application de structures (structures algébriques, structures de situations réelles ou mathématiques) et de procédures (règles, algorithmes, heuristiques, etc.). Autrement dit, le curriculum doit être basé sur une approche didactique mixte de l'algèbre.

Grille de l'indicateur du principe 3

	Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que :
Niveau 0	Une des quatre approches didactiques de l'algèbre n'est pas utilisée
Niveau 1	Toutes les approches sont utilisées mais de manière successive.

Niveau 2	Les quatre approches didactiques sont utilisées chaque année du cursus de l'enseignement de l'algèbre. Des activités sont prévues pour créer des passerelles entres les approches.
Niveau 3	Les quatre approches sont utilisées. Fréquemment, on utilise des situations d'apprentissages intégrant différentes approches didactiques de l'algèbre.

Principe 4	(Multiplicité des aspects de la pensée algébrique) Le curriculum d'algèbre pour tous doit tenir compte de toutes les composantes de la face pensée algébrique du modèle M.I.A.P.A., à savoir, 1) *habileté à penser analytiquement*; 2) *habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques*; 3) *habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies et 4) habileté à généraliser et à abstraire des relations, des règles, des structures algébriques, de même que des structures de situations réelles ou mathématiques.*

Grille de l'indicateur du principe 4

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que :

Niveau 0	La pensée algébrique n'est pas un objectif explicite d'apprentissage.
Niveau 1	L'une des quatre composantes de la pensée algébriques n'est pas un objectif explicite d'apprentissage.
Niveau 2	Les quatre composantes de la pensée algébriques sont des objectifs d'apprentissages de l'algèbre, ces objectifs font l'objet d'évaluation, des activités sont prévues pour le développement de la pensée algébrique.
Niveau 3	En plus des critères du niveau 2, la pensée algébrique est un objet d'apprentissage propre. À cette fin, des moments précis du cursus sont prévus et des activités sont conçues selon une progression des apprentissages pour le développement des différentes composantes de la pensée algébrique.

Principe 5	(Étalement sur plusieurs années) L'enseignement de l'algèbre pour tous doit être étalé sur plusieurs années, en commençant dès le primaire de façon à inclure une phase préliminaire d'exploration.

Grille de l'indicateur du principe 5

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que :

Niveau 0	L'enseignement de l'algèbre pour tous est concentré sur deux ou trois années d'étude seulement.
Niveau 1	L'enseignement de l'algèbre pour tous est étalé sur plusieurs années mais sans prévoir une phase préliminaire d'exploration.
Niveau 2	L'enseignement de l'algèbre pour tous est étalé sur plusieurs années, commence au primaire en prévoyant une phase préliminaire d'exploration.
Niveau 3	L'enseignement de l'algèbre est étalé sur toutes les années de la scolarité obligatoire en commençant dès la première année du primaire avec une longue phase préliminaire d'exploration.

Principe 6	(Connexion de l'algèbre avec le reste des mathématiques) Le curriculum d'algèbre pour tous doit être bien intégré à celui des mathématiques.

Grille de l'indicateur du principe 6

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que:

Niveau 0	Dans l'enseignement de l'algèbre on fait rarement appel à des situations issues des contextes : nombre, géométrie et mesure, probabilité et statistique.
Niveau 1	Dans l'enseignement de l'algèbre on fait peu appel à des situations issues des contextes de nombre, géométrie et mesure, probabilité et statistique.
Niveau 2	Dans l'enseignement de l'algèbre on fait souvent appel à des situations issues des contextes de nombre, géométrie et mesure, probabilité et statistique.

Niveau 3	Dans l'enseignement de l'algèbre on fait souvent appel à des situations issues des contextes de nombre, géométrie et mesure, probabilité et statistique, que ce soit dans l'application de l'algèbre ou dans la construction du savoir algébrique.

Principe 7	(Connexions de l'algèbre avec d'autres domaines) Le curriculum d'algèbre pour tous doit avoir de multiples connexions avec d'autres disciplines scolaires, avec la réalité environnante de l'enfant et avec d'autres domaines où les mathématiques sont utiles.

Grille de l'indicateur du principe 7

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que:

Niveau 0	Dans l'enseignement de l'algèbre on utilise rarement des contextes issus de domaines non mathématiques.
Niveau 1	Dans l'enseignement de l'algèbre on utilise des contextes de peu de domaines non mathématiques.
Niveau 2	Dans l'enseignement de l'algèbre on utilise, de manière continue et récursive, des contextes issus des disciplines scolaires, de l'univers social, de l'univers des carrières, de l'univers des arts et de la culture et des activités de nature ludique.
Niveau 3	En plus du critère du niveau 2, l'utilisation de l'algèbre dans ces divers types de domaines est un objectif d'apprentissage visé par le curriculum.

Principe 8	(Thèmes d'étude) Le curriculum d'algèbre pour tous doit privilégier l'étude des thèmes suivants : *Nombre, Quantité, Accroissement et variation, modèles et régularités, Forme* (shape); *incertitude* (uncertainty).

Grille de l'indicateur du principe 8

Une analyse du curriculum d'algèbre pour tous, montre que:

Niveau 0	Les thèmes: *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme; incertitude* ne sont pas abordés en tant qu'objets d'étude dans l'enseignement de l'algèbre.

Niveau 1	Quelques uns des thèmes *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme, incertitude* sont abordés en tant qu'objets d'étude dans l'enseignement de l'algèbre.
Niveau 2	Tous les thèmes *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme, incertitude* sont abordés en tant qu'objets d'étude dans l'enseignement de l'algèbre.
Niveau 3	Tous les thèmes *nombre, quantité, accroissement et variation, modèles et régularités, forme, incertitude* sont abordés en tant qu'objets d'étude dans l'enseignement de l'algèbre. De plus, un certain niveau de compréhension de ces thèmes est explicitement un objectif d'apprentissage.

Nos huit principes peuvent servir à la fois pour analyser des curriculums existants d'algèbre dans l'éducation de base et chercher à les améliorer ou pour en élaborer de nouveaux. Toutefois, rappelons qu'ils ne concernent que le curriculum officiel d'algèbre, dans sa globalité, sans faire de distinction de niveaux d'étude. En apportant des informations sur un seul principe, chacun des indicateurs fournit des éclairages sur un aspect particulier du curriculum. Aussi, c'est l'ensemble de tous les indicateurs qui peut fournir une vision globale du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Il demeure toutefois impossible en pratique de concrétiser fortement tous nos principes généraux. Dans la construction ou l'amélioration d'un curriculum, la décision de choisir le degré et la manière de concrétiser nos principes varie selon le contexte.

8.2 CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Suite à la prolongation de la scolarité obligatoire, au terme de cette thèse, nous sommes encore plus convaincus qu'au début de la nécessité de reconstruire les curriculums d'algèbre dans l'éducation de base à partir de principes comme ceux auxquels nous sommes arrivés ici.

Notre travail nous apparaît original pour différentes raisons. La première est que pour reconceptualiser le curriculum d'algèbre au niveau de l'éducation de base, nous avons fait provisoirement table rase de la réalité actuelle et mené d'abord une réflexion en

profondeur sur les aspects mathématiques, épistémologique et didactique de l'algèbre. Peu d'auteurs ont, à notre connaissance, fait ce pas de côté avant de proposer ce qu'il faut enseigner en algèbre.

La deuxième est que, comme nous ne voulions pas partir d'une signification a priori de l'algèbre, nous avons d'abord mis en évidence les grandes étapes de son évolution historique, en adoptant la précaution méthodologique de commencer par la période où l'algèbre a fait son apparition comme discipline mathématique autonome en possession de son nom. À cet égard, nous avons proposé un découpage original en huit grandes étapes, beaucoup plus pertinent que les trois étapes de Nesselman : *algèbre rhétorique*, *algèbre syncopée* et *algèbre symbolique*.

La troisième réside dans le fait que nous avons approché l'algèbre comme un type particulier d'activité mathématique et la pensée algébrique comme un ensemble d'habiletés intellectuelles qui y sont nécessaires. Aussi, l'algèbre et la pensée algébrique sont pour nous indissociables et complémentaires; notre modèle M.I.A.P.A. les présente comme les deux faces d'une même médaille. Ce modèle est original est constitue l'une des plus importantes construction théorique de notre thèse. Pour le présenter, nous avons précisé un certain nombre de termes et défini certains concepts importants. Par exemple, la notion d'espace de calcul algébrique, que nous avons défini comme système de représentation externe correspondant à un système algébrique, nous semble être plus précise que celle de domaine d'emploi du calcul algébrique de Chevallard.

Par ailleurs, si les approches didactiques que nous avons élaborées à partir de notre modèle M.I.A.P.A ne sont pas nouvelles, notre thèse a le mérite, nous semble-t-il, de proposer un cadre de référence théorique sur lequel elles s'appuient et, en particulier, d'apporter des précisions concernant la pensée algébrique qui sont utiles dans l'enseignement de l'algèbre.

Les principes généraux que nous avons présentés peuvent servir à la fois pour analyser des curriculums existants d'algèbre dans l'éducation de base et chercher à les améliorer ou pour en élaborer de nouveaux. Toutefois, un travail important reste à faire pour élaborer des indicateurs et des instruments d'analyse plus précis et plus opérationnels.

Rappelons que le but de notre thèse n'était pas du tout d'arriver à un curriculum détaillé et précis qui soit prêt à être enseigné et que depuis le début de ce travail, il y a eu beaucoup de discussions à ce sujet au niveau international et qu'on a vu se multiplier les rapports et les comptes rendus de rencontres. Cependant, ce que nous observons, ce sont des propositions morcelées ou présentant certaines failles au niveau de leur fondement. Notre recherche apparaît alors fondamentale et doit être suivie d'une autre étape.

En proposant des synthèses originales, notre recherche est à caractère théorique principalement. Certes, il est important d'avoir des recherches à partir de questions et d'hypothèses, mais il est tout aussi important, nous semble-t-il, de réaliser des recherches pour construire des modèles théoriques, pour avancer en unifiant et en regroupant en vue d'application pratique.

8.3 LIMITES DE LA RECHERCHE ET MISES EN GARDE

Comme tout travail de recherche, il y a certaines limites à notre travail, qui sont dues à un bon nombre de facteurs dont la méthode utilisée et l'étendue du temps consacré à la recherche, par exemple. Nous les citons dans ce qui suit.

La première a trait à la non-validation de nos constructions théoriques. Dans notre projet initial de recherche, nous avions également prévu construire des instruments d'analyse et analyser des curriculums d'algèbre existants, ce qui aurait constitué une validation de nos modèles. Ce travail s'est avéré par la suite déborder des limites de la thèse. Cependant, soulignons que notre modèle M.I.A.P.A. a subi une forme de

validation. D'une part, il s'appuie sur les données de l'histoire de l'algèbre, et, d'autre part, il est plus précis et intègre diverses propositions récentes concernant l'algèbre et la pensée algébrique que l'on trouve dans la communauté didactique.

Une deuxième limite à souligner est que nous ne prétendons pas que nos propositions peuvent être appliquées au-delà de l'éducation de base. Nous nous sommes surtout intéressé aux premières années d'apprentissage de l'algèbre, couvrant l'école élémentaire et moyenne. Néanmoins, nous pensons que notre M.I.A.P.A pourrait encore servir de cadre de référence pour l'algèbre à enseigner à l'école supérieure, quitte à concrétiser ses aspects par des activités de ce niveau d'étude.

Une troisième limite est que dans la recherche et développement, surtout au niveau des curriculums enseigné et appris, il faut faire des liens avec de nombreuses recherches en didactique de l'algèbre, par exemple, celles concernant l'apprentissage et l'enseignement de notions spécifiques comme la notion de variable ou le signe d'égalité. Les résultats de certaines de ces recherches seront très utiles dans la mise en application de nos principes pour la construction d'un curriculum moderne d'algèbre, elles peuvent même aider à nuancer et à préciser certains d'entre eux.

Une quatrième limite vient du fait qu'en visant l'enseignement de l'algèbre pour tous, les principes curriculaires que nous avons formulés concernent le curriculum d'algèbre dans sa globalité sans distinction de niveau. Il est clair que la manière d'interpréter et d'appliquer certains de ces principes va varier en fonction de l'année d'étude, de la durée de l'éducation de base, du degré de préparation des enseignants et des moyens disponibles. Nous ne pouvions pas, dans le cadre de cette thèse, tenir compte de tous ces détails, surtout que nous avons choisi de faire des propositions qui pourraient être utilisées dans n'importe quel pays.

8.4 PISTES DE RECHERCHE ET DE DÉVELOPPEMENTS FUTURS

Notre recherche donne lieu à de multiples pistes de recherche. La première découle de la nécessité de valider les modèles théoriques que nous avons élaborés. À cet effet, dans une première étape, il nous semble important de construire des instruments pour analyser des curriculums officiels d'algèbre et de les mettre à l'épreuve pour l'analyse de deux curriculums différents. On peut, dans ce sens, analyser soit des documents officiels soit des manuels. Comme les instruments d'analyse sont construits à partir de notre cadre théorique de référence, cette analyse est une mise à l'épreuve de nos différents modèles. Afin de réaliser ces instruments, il est indispensable de développer des indicateurs plus précis et plus opérationnels pour chacun des principes que nous avons annoncés. Chacun des indicateurs doit permettre de juger si un principe a été appliqué convenablement. Ce travail n'est pas facile à faire, car les indicateurs ne devraient pas être simplement des grilles. Il faudrait imaginer d'autres types d'analyse, par exemple faire faire une analyse par trois personnes différentes qui se sont entendues sur le sens des indicateurs et qui confrontent leurs analyses personnelles de façon à arriver à un consensus. Même avec cette précaution, on restera subjectif, mais le recours à plusieurs personnes permettra, nous semble-t-il, d'éviter certains biais.

Une deuxième piste de recherche consiste à élaborer des instruments d'analyse pour évaluer des manuels en algèbre ou même pour évaluer le curriculum d'algèbre enseigné ou appris. Dans ce cas, on s'éloigne un peu de nos modèles proprement dits, mais le cadre de référence qui les sous-tend peut donner lieu à un cadre d'analyse des curriculums enseigné et appris.

Une troisième piste de recherche consiste à se demander ce qu'il serait pertinent de proposer en algèbre au-delà de l'école de base, étant donné que généralement, après la période de l'éducation de base, l'école secondaire se poursuit jusqu'à l'université.

Une quatrième piste de recherche consiste à développer des outils didactiques pour l'enseignement de l'algèbre en étant conforme aux principes que nous avons proposés et en tenant compte des multiples recherches empiriques et de développement.

Bibliographie

Ahlgren, A. & Garfield, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 107-134). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Al Cuocco, E.; Goldenberg, P. & June Mark. (1996). *Habits of mind.* Electronic article. http://www.edc.org/LTT/ConnGeo/HOM.html.

Algebra for the Twenty-first Century. (1992). *Proceedings of the August 1992 Conference.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Anbouba, A. (1978). L'algèbre arabe aux IXe et Xe siècles. Aperçu général. *Journal for the History of Arabic Sciences*, pp. 66-100.

Arnaldez, R; Massignon, L. & Youschkevitch, A.P. (1966). La science arabe. Dans René Taton (éd.), *La science antique médiévale. Des origines à 1450* (première édition en 1957) (pp. 440-525). Paris: QUADRIGE/Presses Universitaires de France.

Arzarello, F.; Bazzini, L. & Chiappini, G. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice. In. L. Meira & D. Carraher (Eds.) *Proceedings of The Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education.* Vol. 1 (pp. 119-134). Recife: Universidad Federal de Pernambuco.

Baruk, S. (1992). *Dictionnaire des mathématiques élémentaires.* Paris: Éditions du Seuil.

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. et Lepage, A.. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes: une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre.* (pp.17-32). Montréal: CIRADE. Université du Québec à Montréal. Novembre 1992.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1993). The arithmetic-algebra transition in problem solving: continuities and discontinuities. In J. Rossi Becker & B. J. Pence (Eds.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol.2, pp.19-25).

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran et

L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., C. Kieran & L. Lee (Eds.). (1996) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Bell, A. (1993). Draft background paper for September meeting. A contribution at the ESRC Seminar Group on *Algebraic processes and the Role of symbolism.* London: University of London.

Bell, A. (1996) Problem-solving approaches to algebra: two aspects. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 167-186). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Bell, E.T. (1940). *La mathématique, reine et servante des sciences.* Traduction de R. de Sainte-Seine. Paris: Payot

Bell, M.S. (1979). Dispenser un enseignement utilitaire des mathématiques. *Perspectives.* Vol 9, No 3, pp. 327-338. Paris: UNESCO

Berlin, D. F. & A. L. White (1995) Connecting school science and mathematics. In P. A. House & A. F. Coxford (Eds.) *Connecting mathematics across the curriculum* (pp.22-33). 1995 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mahematics.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematics education and culture.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors.* Windsor: NFER-NELSON.

Booth, L. R. (1988) Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bourbaki, N. (1958). *Algèbre. Chapitre 1 : Structures algébriques.* Paris : Hermann.

Bourlet, C. (non daté) *Précis d'algèbre. Classe de troisième B et seconde C et D.* Paris: Librairie Hachette.

Boutros, P. (1920). L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes. Paris : Alcan.

Brooms, D. (1981). Les objectifs de l'enseignement des mathématiques au service du développement rural. Dans Robert Morris (sous la direction de) *Études sur l'enseignement des mathématiques.* (pp. 45-66). Paris : Les Presses de l'UNESCO.

Brunschvicg, L. (1912). Les étapes de la philosophie mathématique. Paris: Librairie Félixe Alcan.

Charbonneau, L. & Lefebvre, J. (1992). Grandes lignes de l'évolution de l'algèbre: de la pluralité à l'unicité. Dans *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre.* (pp. 7-16). Montréal: CIRADE, Université de Québec à Montréal.

Charnay, R. (1996) *Pourquoi des mathématiques à l'école ?* Paris: E.S.F. éditeur. (127 pages)

Chevallard, Y. (1985a). *La transposition didactique — Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage : Grenoble.

Chevallard, Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, volume *5*, pp. 51-94.

Chevallard, Y. (1989a). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche.* Publication de l'IREM D'Aix-Marseille, N. 16. Marseille : IREM D'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x*, volume 19, pp. 43-72.

Chevallard, Y. (1989c). Activités de modélisation mathématique en classe de seconde. Rapport intermédiaire de l'équipe « Modélisation algébrique » de l'IREM D'Aix-Marseille. Marseille.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, volume 23, pp. 5-38.

Cokfcroft, W. (1994). Can the same mathematics program be suitable for all students ? *The Journal of Mathematical Behavior.* Special issue: what mathematics should students learn ? Robert B. Davis (Ed.). volume 13, n. 1. pp. 37-52.

Combier, G.; Guillaume J-C. et A. Pressiat (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège.* Paris: Institut national de Recherche Pédagogique. (144 pages)

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics,* volume 5, n.1, pp. 44-48.

Damerow, P. & I. Westbury. (1984). Conclusions drawn from the experiences of the new mathematics movement. In. Peter Damerow & al. Eds. (pp. 22-25). *Mathematics for all.* Science and technology education, Document series No.20. Paris: UNESCO

Dienes, Z.P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review,* vol. 31, n.3, pp. 281-301.

Dieudonné, J. et col. (1978) *Abrégé d'histoire des mathématiques.* Paris: Hermann. (392 pages).

Dieudonné, J. (1955). L'abstraction en mathématique et l'évolution de l'algèbre. Dans *L'enseignement des mathématiques,* (pp 47-74). Paris: Delachaux & Niestlé S.A. (174 pages)

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In David Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eraut, M. (1990). Approaches to curriculum design. In N. Entiwistle (General Editor), *Handbook of Educational Ideas and Practices,* (pp. 539-553). London: Routledge

Fauvel, J.& Gray, J. (1990). *The history of mathematics: a reader.* London: Macmillan.

Fey, T. J. (1989). School algebra for the year 2000. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Agenda for Mathematics Education* (pp. 199-213). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fey, T. J. (1994). Eclectic approaches to elementarization: cases of curriculum construction in the united states. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträber, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 15-26). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equation: The transition form arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics,* volume 9, n. 2, pp. 19-25

Fletcher, T. J. (1980). Algebra in English secondary schools: change over twenty years. In H. G. Steiner (Ed.), *Comparative studies of mathematics curricula. Change and stability 1960-1980.* (pp. 354-369). Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* D. Reidel Pub. Dordrecht. Holland.

Freudenthal, H. (1979). Mathématiques nouvelles ou éducation nouvelle? *Perspectives*, vol. n°3, pp. 339-350. Paris : UNESCO

Gattegno, C. (1965). Mathematics and imagery. *Mathematics Teaching*, volume 33, *pp.* 22-24.

Gérard, E. (sous la direction de) (1961). *Cours d'algèbre.* Montréal : Beauchemin.

Gréco, P. (1984). Didactique: B. La pédagogie des mathématiques. *Encyclopaedia Universalis*, tome VI, 1984, pp. 118-120.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, volume17, n. 2. pp. 167-210.

Heid, M. K. & Fey, J., (1991) *Computer-Intensive Algebra.* College Park: University of Maryland, Department of Mathematics.

Heid; M.K. (1996) A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In. N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teeaching* (pp. 239-256). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Hintikka, J, & Remes, U. (1964) *The Method of Analysis.* Its *Geometrical Origin and Its General Significance.* Boston studies in the philosophy of science, volume 75. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Hirstein, J. J., Weinzweig, A. I., Fey, J. T. & Travers, K. J. (1980). Elementary algebra in the United States: 1955-1980. In H. G. Steiner (Ed.), *Comparative Studies of Mathematics Curricula. Change and Stability 1960-1980.* (pp. 370-394). Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Itard, J. (1977) *Histoire des mathématiques.* (ouvrage collectif) avec. Jacques Bouveresse, Jean Itard et Emile Sallé. Paris : Larousse.

Janke, H.N. & Otte, M. (1981). Origins of the program of "arithmetization of mathematics". In. H.Mehrtens, H. Bos & I. Schneider, Eds.), *Social History of The Nineteenth Century Mathematics.* (pp. 21- 49). Boston : Birkhäuser

Janvier, B.& Bednarz, N. (1993). The arithmetic-algebra transition in problem solving: continuities and discontinuities. In J. Rossi Becker & B. J. Peirce (Eds.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (vol.2, pp.19-25).

Kaput, J.J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. Publication of the National Center for Improving Student Learning & Achievement in Mathematics & Science : University of Massachusetts-Dartmouth.

Kaput, J.J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. In the *Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum* (pp. 25-26). Washington, D.C. : National Academy Press.

Kaput, J. J. (1995a) Reaction to Arzarello, Bazzini & chiappini presentation : *The Construction of Algebraic Knowledge : Towards a Socio-Cultural Theory and Practice.* Presented at The Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education. 1995. Recife: Universidad Federal de Pernambuco.

Kaput, J. J. (1995b) A research base supporting long-term algebra reform. In D. T. Owens, M. K. Reed & G. M. Millaps (Eds.) *Proceeding of the Seventeenth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematical Education,* (Vol.1, pp. 71-93). Columbus, OH : The Ohio State University.

Kaput, J.J. (1995c). Long term algebra reform: democratizing access to big ideas. In C. Lacampagne, W. Blair, &J. Kaput (Eds.), *The Algebra Intiative Colloquium,* volume 1, pp. 33-49. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Kaput, J.J. (1992) Technology and mathematics education. In A. D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Kaput, J. J. (1987). When syntax is semantics. In. Claude Janvier (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, (p. 107). Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra - Some pro and cons. In J. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of The Eighteen International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, volume 1, pp. 157-175. Lisbon: University of Lisbon.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In A. D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspectives. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1992). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In Douglas T.Owens (Ed.), *Research Ideas for The Classroom. Middle Grades Mathematics.* (pp. 179-198). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C.; A. Boileau & M. Garançon. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In. N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 257-294). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. & S. Wagner (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In L.E.S. (Eds.), *Research Agenda for Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 221-237). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, volume 20, n.3, pp. 274-287.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics* (pp. 102-119). London: John Murray.

Lavoie, P. (1994). *Contribution à une histoire des mathématiques scolaires au Québec: l'arithmétique dans les écoles primaires (1800-1920).* Thèse de doctorat. Québec : Université Laval.

Lawson. D. R.(1990). The problem, the issues that speak to change. In. Edgar L. Edwards, JR (Ed.) *Algebra for Every One*, (pp. 1-6). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Legendre, R. (1993). *Dictionnaire actuel de l'éducation*, (2e édition). Montréal: Guérin.

Lee, L. (1997). *La compréhension algébrique : la recherche d'un modèle dans la communauté d'éducation mathématique.* Thèse de doctorat, Montréal : Université du Québec à Montréal.

Le Lionnais, F. (sous la direction de.) (1979) Bouvier A. et George M. *Dictionnaire des mathématiques.* Paris : Presses Universitaires de France.

Lins, R. C. (1992) *A Framework for Understanding what Algebraic Thinking Is.* Doctoral dissertation, Nottingham: University of Nottingham.

Lins, R. C. (1993) *Understanding what Algebraic Thinking is : Analysis and Synthesis.* A contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic processes and the Role of symbolism. London: University of London.

Love, E. (1993). *Geometry and the Intangibility of Algebra.* A contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic processes and the Role of symbolism. London: University of London.

Mason, J. (1995). *Invoking Children's Powers of Mathematical Thinking. in the Early Development of Algebraic Reasoning* : Draft papers for the National Council of Teachers of Mathematics Research Precession Symposium.

National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Principles and Standards for School Mathematics : Discussion Draft.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *A Framework for Constructing a Vision of Algebra.* Working Draft prepared by the algebra working group of the *National Council of Teachers of Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Research Council (1990). Steen, L.A. (Ed.) *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy.* Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. (1981). Buts de la formation en mathématiques et besoins de la société. Dans R. Morris (Ed.) *Études sur l'enseignement des mathématiques* (pp. 1-23). Paris: UNESCO.

Novy, L. (1973). *Origins of Modern Algebra.* Noordhoff International Publishing. Leyden: The Netherlands.

Noddings, N. (1994). A curriculum that cares about individuals. Does everybody counts ? Reflections on reforms in school mathematics. In. Robert B. Davis (Ed.) (pp, 87-104). What mathematics should students learn ? (special issue). *The Journal of Mathematical Behavior,* volume 13, n. 1. Norwood, New Jersey : Ablex Publishing Corporation.

Peel, E. A. (1971). Psychological and educational research bearing on school mathematics. In. W. Servais & T. Varga (Eds.), *Teaching School Mathematics.* Harmondsworth, UK: Penguin Education for UNESCO.

Piaget, P. et Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences.* Paris : Flammarion.

Piaget, P. et G. Henriques. (1978a). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante.* Paris : Presses Universitaires de France.

Piaget, P. et G. Henriques. (1978b). *Recherches sur la généralisation.* Paris : Presses Universitaires de France.

Picciotto, H. (1995). A proposal for new directions in early mathematics : operation sense, tool-based pedagogy, curricula breadth. In. James Kaput (chair): *The Early Development of Algebraic Reasoning.* Draft papers for the NCTM Research Presession Symposium, April 1995. (pp. 65-84). North Dartmouth, MA: University of Massachussets at Dartmouth.

Pollak, H.O. (1997). Mathematical modeling and discrete mathematics. In Joseph G. Rosenstein, Deborah S. Franzblau & Fred S. Roberts (Eds.) *Discrete Mathematics in Schools.* DIMACS Series in discrete mathematics and theoretical computer science. Volume **36** (pp.99-104). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants.* Neuchâtel (Suisse): Peter Lang S.A. 311 pages.

Posner, G. and Strike, J. (1976). A categorization scheme for principles of sequencing content. *Review of Educational Research,* volume46, n.4, pp. 665-690.

Queysanne, M. et A. Delachet. (1960) *L'algèbre moderne.* Paris: Presses Universitaires de France. (135 pages)

Rachlin, S. L. (1989). The Research Agenda in Algebra: A curriculum development perspective In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Agenda for Mathematics Education: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* (pp. 257-265). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (à paraître) Elementary Algebraic Thinking from the Perspective of Didactic Epistemology. In R. Sutherland, T. Rojano, R. Lins & A. Belle (Eds.), *Algebraic Processes and Structure.*

Rashed, R. (1984). *Entre arithmétique et algèbre. Recherche sur l'histoire des mathématiques arabes.* Paris: Les Belles Lettres.

Rashed, R. (1985). D'Alexandrie à Bagdad. In. *Le matin des mathématiciens. Entretiens sur l'histoire des mathématiques présentés par Émile Noël.* Paris : Édition Belin.

Reeuwijk, v.M. (1998). Structure in school algebra. In the *Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. The nature and role of algebra in the K-14 curriculum* (pp. 83-85). Washington, D.C.: National Academy Press.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. In. N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 137- 146). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Rosnick, P. & Clement, J. (1980). Learning without understanding: the effects of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior,* volume 3, n.1, pp. 3-27.

Romberg, T. A. (1992). Mathematics education, secondary. In C. M. Alkin.(ed.), *Encyclopedia of Educational Research,* 6th edition, vol.3, pp.786-798. New York: Macmillan.

Schonfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior,* volume 13, pp. 55-80.

School Mathematics Study Group. (1961). *First Course in Algebra. Teachers commentary.* New haven and London: Yale University Press.

Schwab, J. (1962). The concept of the structure of a discipline. *Educational Record 43* (July 1962),197-205.

Sfard, A. (1995). The development of algebra : Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, volume 14, pp. 15-39

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls or reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, volume 26, pp. 191-228

Shibahara, S. (1987). *Mathematical Principles of Mental Philosophy.*

Shurlow, H. J. (1962). Review of Modern Elementary Algebra by E. Nichols and W. Collins. *The Mathematics Teacher*, 1962, volume 55, p. 402.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics. Volume 2: Special Topics of Elementary Mathematics.* New York : Dover Publication Inc.

Steen, L.A. (1988). The science of patterns. *Science*, n. 240, pp.611-616

Sutherland, R. (1989). Providing a computer based framework for algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, volume 20, pp.317-344

Sutherland, R. (1991). Some unanswered research questions on the teaching and learning of algebra. *For the Learning of Mathematics*, volume 11, n.3, pp. 40-46

Sutherland, R. & T. Rojano (1992). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of mathematical behavior*, volume 12, pp. 353-383.

Tavignot, P. (1993). Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonale en sixième lors de la réforme de 1985. *Recherche en didactiques des mathématiques.* Volume 13, n. 3, pp. 257-294.

Thorpe, J.A. (1989). Past research and current issues. Algebra: What we teach and how should we teach it? In S. Wagner & C. Kieran (Eds.) *Research Agenda for Mathematics Education: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, pp. 11-24. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tollefson, T. C. (1963). *Review of Modern Algebra, Structure and Method, Book I*, by M. Dociani, S. Berman & J. Freilich. The Mathematics Teacher, 1963, volume 56, p. 359.

UNESCO. (1993). *Éducation pour tous: situations et tendances.* Paris: UNESCO.

Usiskin, Z. (1994). From "mathematics for some" to "mathematics for all". In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträber, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (p. 379-397). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.) *The ideas of Algebra, K-12*, (pp.8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should, and must be an eighth-grade course for average students. *Mathematics Teacher*, vol.80, N.6, (pp. 428-436). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1985). We need another revolution in secondary school mathematics. In. Christian R. Hirsh & Marilyn J. Zweng (Eds.) *The secondary school mathematics curriculum. 1985 yearbook.* (pp.1-21). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van der Blij, F.; Hilding S. et A.I. Weinzweig. (1980). A synthesis of national reports on changes in curricula. In H. G. Steiner (Ed.), *Comparative studies of mathematics curricula. Change and stability 1960-1980,* pp. 354-369. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld.

Vergnaud, G., Cortes, A. & Favres-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès des débutants faibles ; problèmes épistémologiques et didactiques. Dans. Gérard Vergnaud, Guy Brousseau et Miche Hulin (Eds.) Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Coloque de Sèvre, mai 1987, pp. 259-280. Paris : Éditions La pensée Sauvage.

Verret, M. (1975). *Le temps des études.* Paris: Librairie Honoré Champion.

Warusfel, A. (1969). *Les mathématiques modernes.* Paris: Éditions du Seuil.

Wheeler, D. (1996). Reflections on different approaches to algebra. In. N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching,* pp. 317- 326. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Wheeler, D. (1989). Context for research on the teaching and learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds) *Research Agenda for Mathematics Education: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* pp. 278-287. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wheeler, D. (1981). Awareness of algebra. *Mathematics Teaching*, volume 96, pp. 29-35.

Winkelmann, B. (1994). Preparing mathematics for students. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträber, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, pp. 9-13. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Yerushalmy, M. & Schwartz, J.L. (1990) *Seizing the Opportunity to Make Algebra Mathematically & Pedagogically Interesting*. A personal communication. (28 p.)

Youschkevitch, A. P. (1976). *Les mathématiques arabes : VIIIe-XVe siècles*. Traduction française de M. Cazenave et K. Jaouiche. Paris : Vrin.

Annexe A

Table des matières de: *First course in Algebra, Part I. Teacher's commentary.*(1961) School Mathematics Study Group. Yale University Press

---

CONTENTS

1. SETS AND THE NUMBER LINE
- 1- 1. Sets and Subsets
- 1-2. The Number Line
- 1- 3. Addition and Multiplication on the Number Line

2. NUMERALS AND VARIABLES
- 2-1. Numerals and Numerical Phrases
- 2-2. Some Properties of Addition and Multiplication
- 2- 3. The Distributive Property
- 2-4. Variables

3. SENTENCES AND PROPERTIES OF OPERATIONS
- 3- 1. Sentences, True and False
- 3-2. Open Sentences
- 3-3. Truth Sets of Open Sentences
- 3-4. Graphs of Truth Sets
- 3-5. Sentences Involving Inequalities
- 3-6. Open Sentences Involving Inequalities
- 37. Sentences with More Than One Clause
- 3-8. Graphs of Truth Sets of Compound Open Sentences
- 3-9. Summary of open sentences
- 3-10. Identity Element
- 3-11. Closure
- 3-12. Associative and Commutative Properties of Addition and Multiplication
- 3-13. The distributive property
- 3-14. Summary: Properties of operations on Numbers of Arithmetic

4. OPEN SENTENCES AND ENGLISH SENTENCES
- 4-1. Open Phrases and English Phrases
- 4-2. Open Sentences and English Sentences
- 4-3. Open Sentences Involving Inequalities

5. THE REAL NUMERS
- 5- 1. The Real Number Line
- 5- 2. Order On the Real Number Line
- 5- 3. Opposites
- 5-4. Absolute Value

6. PROPERTIES OF ADDITION
- 6- 1. Addition of Real Numbers
- 6- 2. Definition of Addition
- 6- 3. Properties of Addition
- 6- 4. The Addition Property of Equality
- 6- 5. The Additive Inverse

7. PROPERTIES OF MULTIPLICATION
- 7- 1. Multiplication of Real Numbers
- 7- 2. Properties of Multiplication
- 7- 3 and 7- 4e Use of the Multiplication Properties
- 7-5. Multiplicative Inverse
- 7- 6. Multiplication Property of Equality
- 7- 7. Solutions of Equations
- 7-8. Reciprocals
- 7- 9. The Two Basic Operations and the Inverse of a Number Under These operations

8. PROPERTIES OF ORDER
- 8- 1. The Order Relation for Real Numbers
- 8- 2. Addition Property of Order
- 8- 3. Multiplication Property of Order
- 8- 4. The Fundamental Properties of Real Numbers

9. SUBTRACTION AND DIVISION FOR REAL NUMBERS
- 9- 1. Definition of Subtraction
- 9- 2. Properties of Subtraction
- 9- 3. Subtraction in Terms of Distance
- 9- 4. Division
- 9- 5. Commons Names
- 9- 6. Fractions