STEVE PETTIGREW

SUR LA DISTRIBUTION DE NOMBRES SPÉCIAUX CONSÉCUTIFS

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de mathématiques et de statistiques
FACULTÉ DE SCIENCES ET GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL

NOVEMBRE 2000

0-612-55787-1

Résumé

Cette thèse porte sur la recherche de suites de nombres abondants consécutifs ainsi que de nombres puissants consécutifs. Dans le premier cas, nous établissons en particulier qu'il existe une infinité de telles suites. Dans le deuxième cas, nous redonnons la preuve connue à l'effet qu'il existe une infinité de couples $\{n, n+1\}$ avec n et $n+1$ puissants. Nous présenterons également quelques outils mathématiques nous permettant de trouver explicitement certains d'entre eux à l'aide de l'ordinateur. Notons que cette recherche s'est faite en deux parties bien distinctes, les résultats et les techniques utilisés n'étant pas les mêmes pour les deux types de nombres étudiés. Aussi, les résultats que l'on donne à propos des nombres abondants conduisent naturellement à la considération de quelques problèmes analogues, tandis que ceux obtenus sur les nombres puissants pavent la voie pour des conjectures plus générales.

Remerciements

Je remercie tout particulièrement le professeur Jean-Marie De Koninck, mon directeur de thèse, pour sa patience et son support tout au long de ma recherche. Je tiens à souligner que sans ses connaissances en théorie des nombres et son aide à tous les points de vue, le présent ouvrage n'aurait jamais pu voir le jour.

Je ne peux non plus passer sous silence le support moral et les encouragements répétés de ma compagne, la vaillante Marie-Pierre Hétu, pendant les bons comme les moins bons moments de mon travail de recherche. De plus, je dois avouer qu'elle a aussi grandement contribué à ce que cette thèse soit écrite dans un français respectable.

En dernier lieu, je tiens à remercier tous ceux et celles qui de près ou de loin ont influencé le cours de ce travail. Plus spécialement, je remercie ma famille immédiate, c'est-à-dire Nicole, Jacques, Mathieu et Amélie, à laquelle je dédie ce mémoire de maîtrise.

Steve Pettigrew, novembre 2000

Table des matières

Introduction générale

Le présent ouvrage propose une brève étude de deux types de nombres entiers bien connus en théorie des nombres : les nombres abondants et les nombres puissants. Dans chaque cas, nous nous sommes attardés à leur distribution dans l'ensemble des nombres naturels.

Au premier chapitre, nous introduisons les nombres abondants en mentionnant des résultats connus, dans une perspective historique. L'essentiel du deuxième chapitre concerne les nombres abondants consécutifs de même que quelques problèmes analogues. Nous avons en particulier établi qu'il est possible de trouver des suites arbitrairement longues de nombres entiers consécutifs abondants. De plus, la démonstration de ce résultat comprend une méthode toute simple permettant de construire explicitement de telles suites.

Au troisième chapitre, un algorithme utilisant le plus grand commun diviseur permet de déterminer si un nombre entier n est puissant ou non, et cela plus rapidement qu'en le factorisant complètement. Tout comme pour les nombres abondants, nous avons aussi mené des recherches sur la question des nombres puissants consécutifs en obtenant des résultats tout aussi pratiques. Par ailleurs, nous utilisons des résultats sur les équations diophantiennes pour trouver explicitement des nombres puissants consécutifs. À cet effet, nous donnons des preuves de l'existence d'une infinité de nombres puissants consécutifs ainsi que d'une infinité de nombres puissants distants de 2. De plus, on obtient d'autres résultats intéressants sur la distribution des nombres puissants.

Enfin, le dernier chapitre présente quelques conjectures liant l'existence de nombres puissants consécutifs et la *conjecture abc*, ainsi que quelques autres conjectures sur la distribution des nombres puissants.

Chapitre 1 : Les nombres abondants

1.1 Historique

Depuis l'antiquité, les mathématiciens se posent bon nombre de questions au sujet des nombres naturels. L'une de ces questions porte sur la somme des diviseurs d'un nombre : est-il possible, lorsque l'on connaît les diviseurs d'un nombre, que la somme de ses diviseurs propres soit elle-même ce nombre ? Comme c'est souvent le cas, la réponse a probablement été donnée avant même que la question ne soit posée. En effet, les premiers Hébreux avaient remarqué l'existence de tels nombres et ils considéraient déjà le nombre 6 comme un nombre parfait ($1 + 2 + 3 = 6$). Encore aujourd'hui, ces nombres sont appelés *nombres parfaits* et comportent toujours une certaine part de mystère. Au départ, l'aspect mystique prenait plutôt place dans la signification que l'on donnait à ces nombres. Cette notion de perfection était par exemple en accord avec le fait que Dieu a créé le monde en 6 jours ou encore que la lune met 28 jours ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$) pour faire le tour de la terre. Les nombres parfaits étaient certainement un élément important dans l'ensemble des spéculations numérologiques. Par ailleurs, du moment qu'on a défini ce qu'est un nombre parfait, on peut qualifier les autres d'imparfaits.

Contrairement aux objets parfaits, les choses imparfaites peuvent l'être à des degrés différents. Il semble qu'un des premiers à classifier les nombres imparfaits fut Nicomacus (aux alentours de l'an 100), qui séparait les nombres pairs en nombres *abondants* (nombres dont la somme des diviseurs propres est supérieure au nombre lui-même), *déficients* (nombres dont la somme des diviseurs propres est inférieure au nombre lui-même) et *parfaits*. Cette distinction était tout aussi importante en numérologie. À cet effet, on peut citer Alcuin (735-804), professeur de Charlemagne, qui notait que l'humanité entière provenait des 8 âmes sauvées par l'Arche de Noé, et comme 8 est un nombre déficient ($1+2+4 = 7 < 8$), il concluait que cette deuxième création s'avérait imparfaite par rapport à la première. Nicomacus serait lui aussi le premier à avoir découvert les troisième (496) et quatrième (8128) nombres parfaits. Nicomacus remarquait que, tout comme la beauté et l'excellence, les nombres parfaits sont rares mais relativement faciles à trouver. Par contre, les nombres déficients et abondants sont très nombreux et distribués chaotiquement en accord avec la présence de ce qui est mauvais et mal dans le monde. Notons par exemple que les dix premiers nombres abondants sont $12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48$ et 54, alors que les dix premiers nombres déficients sont $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$ et 11. Bien entendu, on ne s'est pas uniquement attardé aux nombres parfaits, abondants et déficients d'un point de vue numérologique. En plus de vouloir trouver des lois permettant de classifier et de trouver plus facilement ces nombres, on s'est évidemment posé des questions sur la nature de leur répartition respective dans l'ensemble des nombres naturels.

Étant donné la rareté des nombres parfaits et les moyens de calcul limités d'autrefois, des mathématiciens ont avancé des conjectures, souvent fausses, sur l'existence de ces nombres. Il y avait donc aussi des croyances au sujet des propriétés arithmétiques des nombres parfaits. Par opposition aux connotations théologiques qui furent données aux nombres de toutes sortes, nous sommes aujourd'hui en mesure de confirmer ou d'infirmer de manière irréfutable une bonne partie des conjectures et des résultats mathématiques énoncés dans les siècles précédents. Par exemple, on a longtemps cru qu'il y avait exactement un nombre parfait par tranche de puissance de 10. Certes, c'est le cas pour les quatre premiers, mais ce n'est qu'au XV^e siècle que des arithméticiens réfutèrent cette affirmation en ajoutant le nombre 33550336 à la liste comme 5^e nombre parfait. Des généralisations hâtives du même genre ont aussi été faites au sujet des nombres abondants. En effet, de nombreux mathématiciens ont pensé à tort que les nombres abondants ne pouvaient qu'être pairs, avant que des mathématiciens comme Charles de Bouvelles (1470-1553), citant 45045 et ses multiples, ou encore Bachet de Mézirac (1581-1638), citant 945 (le premier nombre abondant impair), ne viennent les contredire. C'est seulement au XVI^e siècle que des informations plus précises sur la nature des nombres abondants sont données. Charles de Bouvelles nota que tout diviseur d'un nombre parfait est déficient et que tout multiple d'un tel nombre est abondant. Charles de Neuveglise (1700) allait dans le même sens en précisant que chaque multiple de 6 ou encore d'un nombre abondant est aussi un nombre abondant. Plusieurs cas particuliers du même type seront obtenus au fil des ans, dont certains font l'objet du paragraphe suivant, mais il faudra toutefois attendre le XX^e siècle et la théorie probabiliste des nombres pour obtenir des résultats concrets sur la répartition de ces nombres.

1.2 Résultats préliminaires et définitions

Voici d'abord quelques définitions et résultats de base essentiels à notre présentation sur les nombres abondants.

DÉFINITION 1.1 : La représentation unique en un produit de nombres premiers d'un entier naturel supérieur à 1 est appelée la *représentation canonique* de ce nombre.

DÉFINITION 1.2 : Un nombre entier est appelé un *diviseur propre* d'un nombre n s'il en est un diviseur et que ce diviseur n'est pas le nombre n lui-même.

DÉFINITION 1.3 : On définit la fonction arithmétique ϕ d'Euler de la façon suivante pour un entier positif m : $\phi(m) = \#\{n \leq m : (n,m) = 1\}$, où (n,m) représente le plus grand commun diviseur de m et de n.

DÉFINITION 1.4 : On définit la fonction arithmétique $\sigma(n)$ comme étant la somme des diviseuis de l'entier positif n.

DÉFINITION 1.5 : Un nombre entier n est appelé *abondant* (respectivement *déficient*) si $\sigma(n) > 2n$ (respectivement si $\sigma(n) < 2n$).

DÉFINITION 1.6 : On définit la fonction arithmétique $f(n)$ de la manière suivante : $f(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$. Ainsi, un nombre sera abondant si $f(n) > 2$.

THÉORÈME 1.1 : Soit $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_r^{\alpha_r}$ la représentation canonique d'un entier naturel n. Alors

$$\sigma(n) = \frac{(q_1^{\alpha_1+1} - 1)(q_2^{\alpha_2+1} - 1)\ldots(q_r^{\alpha_r+1} - 1)}{(q_1 - 1)(q_2 - 1)\ldots(q_r - 1)}$$

et donc

$$f(n) = \frac{(q_1^{\alpha_1+1} - 1)(q_2^{\alpha_2+1} - 1)\ldots(q_r^{\alpha_r+1} - 1)}{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_r^{\alpha_r}(q_1 - 1)(q_2 - 1)\ldots(q_r - 1)}.$$

THÉORÈME 1.2 (THÉORÈME DU RESTE CHINOIS) : Soit $m_1, m_2, ..., m_r$ des nombres naturels relativement premiers deux à deux. Soit $a_1, a_2, ..., a_r$ des entiers quelconques. Alors, le système de congruences

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$
\begin{aligned}
x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\
\vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\
x &\equiv a_r \pmod{m_r}
\end{aligned}
$$

possède une solution donnée par

$$x_0 = \sum_{j=1}^{r} \frac{m b_j a_j}{m_j},$$

où $m = m_1 m_2 \ldots m_r$ et où chaque b_j, $j = 1, 2, ..., r$, est la solution de la congruence $\frac{m b_j}{m_j} \equiv 1 \pmod{m_j}$ (donnée explicitement par $b_j \equiv \left(\frac{m}{m_j}\right)^{\phi(m_j)-1} \pmod{m_j}$). De plus, toutes les solutions sont congrues modulo m.

THÉORÈME 1.3 : La somme infinie des inverses des nombres premiers diverge. Autrement dit,

$$\sum_p \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots = +\infty.$$

NOTE : On peut trouver la preuve de ces trois résultats dans De Koninck et Mercier [5].

1.3 Résultats connus

Il est intéressant de noter les résultats suivants au sujet des nombres abondants. Le premier nombre qui n'est pas déficient est le nombre parfait 6, alors que 12 est le plus petit nombre abondant. Les 10 nombres abondants qui suivent sont 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54 et 56. Il n'y a que 22 nombres abondants entre 1 et 100, et 246 entre 1 et 1000, ce qui est relativement conforme au fait que la densité des nombres abondants est environ 0,25 (voir le théorème 1.5). Parmi ces 246 nombres, il n'y a qu'un nombre impair, soit 945. Les nombres abondants impairs sont beaucoup moins nombreux que les nombres abondants pairs, et nous verrons mieux pourquoi lorsque nous nous attarderons à la fonction $f(n)$. Une des propriétés de base des nombres abondants est que tout multiple d'un nombre parfait ou d'un nombre abondant est abondant, d'où en particulier le fait que tous les multiples de 6 sont abondants. Cette propriété découle directement du résultat suivant :

THÉORÈME 1.4 : Soit deux entiers $k > 1$ et $n \geq 1$. Alors $\sigma(kn) > k\sigma(n)$.

DÉMONSTRATION : Soit $d_1, d_2, ..., d_r$ les diviseurs de n. Alors $1, kd_1, kd_2, ..., kd_r$ divisent kn. Ainsi, $\sigma(kn) \geq 1 + kd_1 + kd_2 + \ldots + kd_r$ et donc $\sigma(kn) > k(d_1 + d_2 + \ldots + d_r) = k\sigma(n)$.

Comme $\sigma(n) \geq 2n$ pour les entiers n parfaits ou abondants, nous pouvons donc affirmer que dans ces cas, $\sigma(kn) > k\sigma(n) \geq 2kn$, ou autrement dit que les multiples des nombres parfaits ou abondants sont abondants.

Il s'avère ainsi très facile de trouver des nombres abondants aussi grands que l'on veut en prenant tout simplement des multiples de 6. Ce sont plutôt les nombres abondants non multiples de 6 qui peuvent poser problème. Chose certaine, nous pouvons éliminer les puissances de 2 et les nombres premiers de nos recherches de nombres abondants, puisque ces derniers sont toujours des nombres déficients.

Définissons la fonction de densité

$$A(x) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\#\{n \leq N : \sigma(n) \geq xn\}}{N} \qquad (x > 0).$$

Ainsi, Davenport (1933) montra que $A(x)$ existe et est continue pour tout x, puis Erdös [10] (1934) en donna une preuve plus élémentaire. Wall [21] (1971) et Wall *et al.* [22] (1977) montrèrent en particulier que $0.2441 < A(2) < 0.2909$, et Deléglise [6] (1998) améliora ce résultat en démontrant l'inégalité $0.2474 < A(2) < 0.2480$.

THÉORÈME 1.5 : Il existe une constante c telle que $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \#\{n \leq N : \frac{\sigma(n)}{n} > 2\} = c$, et $0.2474 < c < 0.2480$; en d'autres mots, la densité des nombres abondants existe et est située entre 0.2474 et 0.2480 (voir Deléglise [6]).

Chapitre 2 : Suites de nombres abondants consécutifs

2.1 Nombres abondants consécutifs

Même si la densité des nombres déficients est environ le triple de celle des nombres abondants, nous savons qu'il ne peut exister plus de 5 nombres déficients consécutifs, étant donné que les multiples de 6 sont abondants. Par contre, de tels quintuplets de nombres déficients sont relativement faciles à trouver. Mentionnons à cet effet les cinq plus petits : (1,2,3,4,5), (7,8,9,10,11), (13,14,15,16,17), (31,32,33,34,35) et (43,44,45,46,47). Qu'en est-il des suites de nombres abondants consécutifs ? À l'aide d'un logiciel de calcul, on obtient que les deux premiers nombres abondants consécutifs sont 5775 et 5776, alors que les trois premiers nombres abondants consécutifs sont 171 078 830, 171 078 831 et 171 078 832. On ne sait cependant pas quelle est la plus petite suite de quatre nombres abondants consécutifs. De plus, pour obtenir une telle suite, on a nécessairement besoin d'une paire de nombres abondants impairs consécutifs et on ne connaît même pas la plus petite. Nous connaissons par contre une suite de quatre nombres abondants consécutifs, sans savoir si elle est la plus petite possible; son ordre de grandeur est 10^{47}. La méthode utilisée pour trouver cette suite fait en particulier appel au théorème du reste chinois et cette même méthode sera employée pour démontrer un résultat général concernant les nombres abondants consécutifs. Le résultat qui suit donne explicitement quatre nombres abondants consécutifs.

THÉORÈME 2.1 : Considérons le nombre

$$n = 27357777511142782651629090524262717337240110137 4.$$

Alors, les nombres $n, n+1, n+2$ et $n+3$ sont abondants.

DÉMONSTRATION : Pour appliquer la méthode, on doit au départ choisir judicieusement trois nombres abondants m_1, m_2 et m_3 relativement premiers deux à deux. On veut ici se constituer un système de congruences pour répondre aux conditions nécessaires à l'application du théorème du reste chinois (théorème 1.2), qui nous assurera ainsi de l'existence d'une solution. En choisissant le système

$$
(1) \qquad \begin{aligned} n &\equiv -1 \pmod{m_1} \\ n &\equiv -2 \pmod{m_2} \\ n &\equiv -3 \pmod{m_3}, \end{aligned}
$$

il est clair que les nombres $n+1, n+2$ et $n+3$ sont abondants, puisqu'ils sont divisibles respectivement par m_1, m_2 et m_3 (théorème 1.4). Un choix judicieux des m_i est ici de mise, car on veut que la solution n du système (1) soit relativement petite et en même temps un nombre abondant. Il ne faut pas perdre de vue que l'intérêt est de se donner une borne supérieure dans le but d'avoir une certaine idée de l'ordre de grandeur de la plus petite suite du genre. On tentera donc de déterminer une solution minimale pour cette technique.

En faisant appel au théorème 1.2, on obtient que la solution x_0 au système (1) est

$$
\begin{aligned} x_0 &\equiv m_2m_3a_1b_1 + m_1m_3a_2b_2 + m_1m_2a_3b_3 \pmod{m_1m_2m_3} \\ &\equiv -m_2m_3b_1 - 2m_1m_3b_2 - 3m_1m_2b_3 \pmod{m_1m_2m_3}, \end{aligned}
$$

où les b_j sont donnés par

$$
(2) \qquad b_j \equiv \left(\frac{m}{m_j}\right)^{\phi(m_j)-1} \pmod{m_j} \qquad (j = 1, 2, 3).
$$

On est donc tenté de choisir les m_i relativement premiers bien sûr, mais aussi les plus petits possibles pour augmenter les chances d'obtenir une solution minimale. Dans cette optique, on choisit $m_1 = 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 29$, $m_2 = 2^6 \cdot 109$ et $m_3 = 3^4 \cdot 31 \cdot 37 \cdot \ldots \cdot 107$, dans lesquels les points de suspension représentent le produit des nombres premiers qui suivent et qui précèdent, par exemple 11 et 29 respectivement, soit dans ce cas 13, 17, 19 et 23. Notons que pour ces choix, nous avons $f(m_1) = 2.00306, f(m_2) = 2.00258$ et $f(m_3) = 2.00745$, et que l'ordre est important dans l'assignation de ces nombres aux variables m_1, m_2 et m_3 (voir remarque 1). Comme $2|m_2$ et $m_2|n+2$, alors n est nécessairement pair; par ailleurs, comme $3|m_3$ et $m_3|n+3$, alors $3|n$. Il s'ensuit donc que $6|n$ et donc que n est abondant. Ensuite, comme solution au système (2), on trouve $b_1 = 4426224514, b_2 = 4077$ et $b_3 = 191046774633658015165648953785238 85$. En calculant dans un premier temps $-m_2m_3b_1 - 2m_1m_3b_2 - 3m_1m_2b_3$, ce qui donne

$$
-45602429699011054706443211719067045778115510330 26,
$$

et en déterminant par la suite à quelle valeur positive minimale ce nombre correspond modulo $m_1m_2m_3$, on obtient les nombres abondants consécutifs suivants :

$$
\begin{aligned}
n &= 273577775111427826516290905242627173372401101374 \\
&= 2 \cdot 3 \cdot 45596295851904637752715150873771195562066850229, \\
n+1 &= 273577775111427826516290905242627173372401101375 \\
&= 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 28297 \cdot 1849044277 \cdot 68399693729 \cdot \\
&\quad 2835740617471, \\
n+2 &= 273577775111427826516290905242627173372401101376 \\
&= 2^6 \cdot 109 \cdot 39216997579046420085477480682716051228841901 \\
\text{et} & \\
n+3 &= 273577775111427826516290905242627173372401101377 \\
&= 3^5 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89^2 \cdot 97 \cdot \\
&\quad 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 31889515159.
\end{aligned}
$$

REMARQUES :

1. Ce choix des m_i nous assurait que la solution n serait divisible par 6 et, par conséquent, qu'elle serait un nombre abondant. Nous aurions pu cependant utiliser un système comprenant quatre congruences, autrement dit prendre quatre nombres abondants m_1, m_2, m_3 et m_4 premiers deux à deux, sauf que de cette façon, les m_i auraient été beaucoup plus grands, ce qui n'est pas ce qu'on désire. D'autres choix des trois nombres abondants m_1, m_2 et m_3, tout comme le rang du terme divisible par 6 (dans notre cas, c'était le premier terme de la suite), peuvent être envisagés; il en sera vaguement question dans la prochaine section.

2. À l'aide d'un logiciel de calcul, on a vérifié qu'il n'existait pas de telle suite inférieure à 10^8.

Ce qui rend cette technique intéressante, c'est qu'on peut toujours construire, sans grande difficulté, des ensembles de nombres abondants sans facteur en commun aussi grands que l'on veut. Pour s'en rendre compte, on peut regarder comment se comporte la fonction f. Prenons un entier naturel quelconque n et sa représentation canonique $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_r^{\alpha_r}$. Considérons maintenant la fonction arithmétique

$$f(n) = \frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \frac{(q_i^{\alpha_i+1} - 1)}{(q_i^{\alpha_i+1} - q_i^{\alpha_i})}.$$

Si r est assez grand, le produit des quotients $\frac{(q_i^{\alpha_i+1}-1)}{(q_i^{\alpha_i+1}-q_i^{\alpha_i})}$ sera aussi grand que l'on veut, compte tenu du théorème qui suit :

THÉORÈME 2.2 : Étant donné un entier positif α, le produit

$$\prod_p \frac{(p^{\alpha+1} - 1)}{(p^{\alpha+1} - p^{\alpha})},$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, diverge.

DÉMONSTRATION : On a

$$\begin{aligned}
\prod_p \frac{(p^{\alpha+1} - 1)}{(p^{\alpha+1} - p^{\alpha})} &= \prod_p \frac{(p^{\alpha+1} - 1)}{(p^{\alpha})(p-1)} \\
&= \prod_p \frac{(p^{\alpha} + p^{\alpha-1} + \ldots + p + 1)}{p^{\alpha}} \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^{\alpha}}\right) \\
&> \prod_p \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\
&> 1 + \sum_p \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Comme $\sum_p \frac{1}{p}$ diverge (théorème 1.3), ceci complète la démonstration du théorème 2.2.

Donc, étant donné que $f(n) = \frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \frac{(q_i^{\alpha_i+1}-1)}{(q_i^{\alpha_i+1}-q_i^{\alpha_i})}$ et que les termes $\frac{(q_i^{\alpha_i+1}-1)}{(q_i^{\alpha_i+1}-q_i^{\alpha_i})}$ sont tous supérieurs à 1, il suit du théorème précédent que nous pouvons obtenir des valeurs aussi grandes que l'on veut pour $f(m_i)$ avec des m_i premiers deux à deux. En particulier, ce produit peut être plus grand que 2 de manière à obtenir des nombres abondants m_i. Bien sûr, on peut aussi faire varier les exposants α_i affectés aux nombres premiers q_i correspondants pour s'approcher d'une valeur de $f(n)$ voulue. Un tableau des différents rapports $\frac{(q_i^{\alpha_i+1}-1)}{(q_i^{\alpha_i+1}-q_i^{\alpha_i})}$ devient très utile pour examiner le poids qu'ils ont les uns par rapport aux autres en fonction des nombres premiers q_i et des exposants α_i correspondants. On se rendra compte cependant que cette technique devient rapidement très lourde, et cela à partir du moment où l'on doit déterminer plus de trois nombres abondants premiers deux à deux, d'autant plus que les calculs donnent des nombres gigantesques. Le dernier exemple que nous donnerons en fait foi et démontre aussi la pertinence d'utiliser un tableau comme celui qui figure à la page suivante dans la recherche d'une solution minimale.

Dans le même ordre d'idées, notons que la dernière colonne du tableau 1 représente le facteur par lequel la fonction f sera multipliée si l'on augmente de 1 la valeur de l'exposant a associé à un nombre premier p. Plus concrètement, cette colonne peut nous aider à déterminer par exemple s'il est préférable de multiplier le nombre $n = 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 29 = 1078282205$, pour lequel $f(n) = 1.93844$, par un des nombres premiers apparaissant déjà dans sa représentation canonique, ou par 31, de façon à ce qu'il devienne abondant et qu'il soit le plus petit possible. En effet, le tableau 1 nous dit que la fonction f sera multipliée par $1.0\bar{3}$ si nous multiplions n par 5 et qu'elle sera multipliée par 1.032258065... si nous multiplions n par 31. Nous avons donc avantage à choisir le premier cas. Notons que cet exemple illustre la dernière étape qui a conduit au choix du nombre abondant $m_1 = 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 29$ utilisé dans la démonstration du théorème 2.1. La construction de ce nombre s'est faite étape par étape en partant avec $n = 5$ et en se posant chaque fois la question suivante : est-il préférable de multiplier le nombre par un nombre premier apparaissant déjà dans sa factorisation ou de le multiplier par le plus petit nombre premier n'y apparaissant pas ? Bien sûr, tout cela dans l'optique de minimiser n. Pour s'en rendre compte, il suffit de regarder comment se comporte la fonction $f(n)$ pour $n = p^a$. Comme

$$f(p^a) = \frac{p^{a+1}-1}{p^{a+1}-p^a} = 1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^a},$$

il est clair que pour un a fixé, plus p est grand, plus $f(p^a)$ sera petit. Par contre, pour un nombre premier p fixé, on remarque que $f(p^a)$ croît avec a. On peut vérifier ce phénomène dans le tableau de la page suivante.

Tableau 1 : Valeurs de $f(n)$ pour $n = p^a$ où p est premier

p	a	$f(n) = f(p^a) = \frac{\sigma(p^a)}{p^a}$	$\frac{f(p^{a+1})}{f(p^a)}$
2	1	1.5	1.16667
	2	1.75	1.07143
	3	1.875	1.03333
	4	1.9375	1.01613
	5	1.96875	1.00794
	6	1.984375	1.00394
	7	1.9921875	1.00196
	8	1.99609375	1.00098
3	1	1.333333333	1.083333333
	2	1.444444444	1.025641026
	3	1.481481481	1.008333333
	4	1.49382716	1.002754821
	5	1.497942387	1.000915751
5	1	1.2	1.033333333
	2	1.24	1.006451613
	3	1.248	1.001282051
7	1	1.142857143	1.017857143
	2	1.163265306	1.002506266
11	1	1.090909091	1.007575758
	2	1.099173554	1.000683527
13	1	1.076923077	1.005494505
	2	1.082840237	1.000420345
17	1	1.058823529	1.003267974
	2	1.062283737	1.000191608
19	1	1.052631579	1.002631579
23	1	1.043478261	1.001811594
29	1	1.034482759	1.001149425
31	1	1.032258065	1.001008065
37	1	1.027027027	1.000711238
41	1	1.024390244	1.00058072
...			

En guise de dernier résultat explicite et plus général, nous donnerons une suite de cinq nombres abondants consécutifs. En choisissant $m_1 = 5^5 \cdot 67 \cdot \ldots \cdot$

$911, m_2 = 2^{13} \cdot 9173, m_3 = 3^9 \cdot 919 \cdot \ldots \cdot 9161$ et $m_4 = 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 61$, on a $f(m_1) = 2.000469, f(m_2) = 2.0000959, f(m_3) = 2.0000208$ et $f(m_4) = 2.00245$. Comme m_2 et m_3 sont respectivement divisibles par 2 et par 3, nous nous assurons que la solution n est divisible par 6. La suite de cinq nombres abondants consécutifs obtenue à l'aide de ces quatre nombres abondants est de l'ordre de 10^{3946}. Nous sommes maintenant prêts à énoncer le résultat général qui découle de cette idée.

THÉORÈME 2.3 : Pour chaque entier positif $k \geq 2$, il existe une suite de k nombres abondants consécutifs.

DÉMONSTRATION : Soit un entier $k \geq 2$. Selon le théorème 2.2 et les observations qui lui font suite, on peut affirmer qu'il existe k nombres abondants premiers deux à deux. Notons ces k nombres $m_1, m_2, \ldots, m_k$, et considérons le système de congruences suivant :

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv -2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \quad \vdots \\ x &\equiv -k \pmod{m_k}. \end{aligned}$$

Grâce au théorème 1.2, nous savons que ce système possède une solution donnée par

$$x_0 = \sum_{j=1}^{k} \frac{-mb_j j}{m_j},$$

où $m = m_1 m_2 \ldots m_k$ et les b_j sont les solutions aux congruences $\frac{mb_j}{m_j} \equiv 1 \pmod{m_j}$ obtenues par $b_j \equiv \left(\frac{m}{m_j}\right)^{\phi(m_j)-1} \pmod{m_j}$. De plus, comme toutes les solutions sont congrues modulo $m_1 m_2 \ldots m_k = m$, il suffit de prendre pour n la plus petite solution positive possible modulo m. Du système de congruences, du fait que les m_i sont abondants et du théorème 1.5, nous déduisons directement que $n+1, n+2, \ldots, n+k$ sont k nombres abondants consécutifs, ce que nous voulions démontrer.

2.2 Problèmes analogues

Il est tout aussi intéressant de chercher d'autres types de nombres abondants consécutifs. Les tableaux qui suivent en contiennent une certaine variété.

Tableau 2 : Les k plus petits nombres abondants pairs consécutifs

k	$n, n+2, \ldots, n+2(k-1)$
2	$18, 20$
3	$100, 102, 104$
4	$348, 350, 352, 354$
5	$2988, 2990, 2992, 2994, 2996$
6	$801340, 801342, \ldots, 801350$

Rappelons que nous ne connaissons pas les deux plus petits nombres abondants impairs consécutifs. Cependant, nous avons obtenu un exemple d'une telle suite en ajustant notre méthode à ce cas particulier.

Tableau 3 : Les plus petits nombres abondants impairs consécutifs

k	$n, n+2, \ldots, n+2k$
0	945
1	$n \leq 1.85854\ldots375 \times 10^{45}$

Cette fois-ci, notre système de départ est le suivant :

$$\begin{aligned} n &\equiv -1 \pmod{3^6 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 107} \\ n &\equiv -2 \pmod{2} \\ n &\equiv -3 \pmod{5^2 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 29}. \end{aligned}$$

Dans ce système, les nombres $m_1 = 3^6 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 107$ (car $f(m_1) = 2.01483$) et $m_3 = 5^2 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 29$ (car $f(m_3) = 2.00306$) permettent de nous assurer que les nombres $n+1$ et $n+3$ sont abondants, et c'est la condition $n \equiv -2 \pmod{2}$ qui nous assure que le nombre $n+2$ est pair, de manière à ce que $n+1$ et $n+3$ soient deux nombres abondants impairs consécutifs. Les b_i nécessaires au calcul de la solution n sont dans ce cas $b_1 = 158474988507041521056553370532768359$, $b_2 = 1$ et $b_3 = 5132514273$. Enfin, la solution n congrue à $(-m_2m_3b_1 - 2m_1m_3b_2 - 3m_1m_2b_3)$ modulo $m_1m_2m_3$ que l'on obtient est ainsi

$$185854170945548564273193028874601629153539137 2.$$

Les nombres abondants impairs consécutifs recherchés sont donc

$n+1 = 1858541709455485642731930288746016291535391373 = 3^6 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 107 \cdot 136744639$

et

$n+3 = 1858541709455485642731930288746016291535391375 = 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 427724107807 \cdot 1239917483619662108160 1.$

Tableau 4 : Les k plus petits nombres abondants consécutifs multiples de 3

k	$n, n+3, \ldots, n+3(k-1)$
2 et 3	$942, 945, 948$
4 et 5	inconnus

2.3 Nombres k-abondants consécutifs

Tout comme pour les nombres parfaits, on peut étendre la notion de nombre abondant en comparant la fonction $\sigma(n)$ à d'autres multiples entiers de n. Plus précisément, on définit un nombre n comme étant k-abondant (respectivement k-parfait) si $\sigma(n) > kn$ (respectivement si $\sigma(n) = kn$) pour un entier $k \geq 2$. En particulier, un nombre abondant est un nombre 2-abondant. Les plus petits nombres 3-abondants, 4-abondants et 5-abondants sont donnés dans le tableau 5. On remarquera que ces nombres sont déjà très grands pour $k = 5$ et qu'il en est donc de même pour les nombres k-abondants consécutifs. En effet, l'un des deux plus petits nombres 3-abondants consécutifs doit être impair; or le premier nombre 3-abondant impair est 1018976683725.

Tableau 5 : Les plus petits nombres 3-abondants, 4-abondants et 5-abondants

	Le(s) plus petit(s)
3-abondants	$180, 240, 360, 420, 480, 504, 540, 600$
4-abondants	$27720, 50400, 55440, 60480$
5-abondants	122522400
	Le plus petit impair
3-abondant	1018976683725
4-abondant	$3^5 5^3 7^2 11^2 13 \cdot \ldots \cdot 89 \approx 1.85 \times 10^{39}$
5-abondant	$3^6 5^4 7^3 11^2 13^2 17^2 19 \cdot \ldots \cdot 277 \approx 10^{122}$

La technique utilisée au paragraphe précédent est tout aussi valable pour obtenir des suites de ces nombres, puisqu'un multiple d'un nombre k-abondant ou d'un nombre k-parfait est évidemment un nombre k-abondant, d'après le théorème 1.4. Cependant, les nombres que l'on obtient sont très grands et sans grand intérêt déjà pour $k = 3$. Nous ne donnerons donc ici qu'un seul exemple de nombres k-abondants consécutifs, soit les deux nombres 3-abondants consécutifs obtenus à l'aide de la technique présentée au chapitre précédent (adaptée à notre exemple), mais sans que l'on sache s'il s'agit bien des deux plus petits.

Dans la technique élaborée pour obtenir explicitement une suite de k nombres abondants, nous devions trouver $k-1$ nombres abondants premiers deux à deux en les assignant à $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$, de manière à ce que la solution n

soit divisible par 6. Cette façon de faire permet de réduire le système de départ à $k-1$ conditions ainsi que la taille des m_i, mais la technique reste tout aussi valable si nous choisissons au départ k nombres abondants $m_1, \ldots, m_k$ premiers deux à deux, comme auparavant. La technique à privilégier dépend de ce que l'on cherche au départ. Par exemple, deux congruences sont nécessaires si on veut obtenir deux nombres k-abondants pour tout $k > 1$, parce qu'une seule condition ne peut donner l'assurance que la solution sera précédée ou suivie d'un nombre k-abondant.

Ainsi, pour déterminer 2 nombres 3-abondants consécutifs, il suffit dans un premier temps de choisir les deux nombres 3-abondants premiers deux à deux $m_1 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 29$ (car $f(m_1) = 3.02048$) et $m_2 = 2^9 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 197$ (car $f(m_2) = 3.00282$). Nous avions ici besoin d'un nombre pair et d'un nombre impair, c'est pourquoi nous avons pris pour m_1 le plus petit nombre 3-abondant impair et ensuite pour m_2 le plus petit nombre 3-abondant pair sans facteur en commun avec m_1. Dans un deuxième temps, nous n'avons plus qu'à déterminer la solution n au système

$$\begin{aligned} n &\equiv -1 \pmod{m_1} \\ n &\equiv -2 \pmod{m_2}. \end{aligned}$$

De ce système, on obtient deux nombres 3-abondants $n+1$ et $n+2$ de l'ordre de 2×10^{84}. Voici les calculs :

La solution x_0 au système précédent est donnée par

$-m_2 b_1 - 2m_1 b_2 = -4109578667076519731948314210734930799000448997533441827$ $1067302426431063657818355850 26.$

De là, on obtient

$n = 22118857896205088072880216278021163468902048832486923257807284384965596671460184181 74,$

soit la plus petite solution positive congrue à x_0 modulo $m_1 m_2$. Notons que les deux nombres 3-abondants consécutifs obtenus sont

$n+1 = 2211885789620508807288021627802116346890204883248692325780728438496559667146018418175 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 217069323071719023330984180003310344822306879350542258726964124529046732 3$

et

$$n + 2 = 2211885789620508807288021627802116346890204883248692325780728$$
$$4384965596671460184181 76 = 2^9 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 79 \cdot 83^2 \cdot 89 \cdot \ldots \cdot 197 \cdot 10889 \cdot 788993.$$

Il est important de nous rappeler qu'en procédant de cette manière, c'est-à-dire en choisissant en premier lieu le plus petit nombre 3-abondant impair, nous n'avons qu'augmenté nos chances d'obtenir le couple de nombres 3-abondants consécutifs le plus petit possible. En somme, rien ne contredit le fait qu'en prenant deux autres nombres 3-abondants premiers deux à deux plus grands que m_1 et m_2, nous aurions pu obtenir une solution plus petite. Par exemple, en remplaçant tout simplement m_1 par $M_1 = 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 29 = \left(\frac{9m_1}{7}\right) > m_1$ (pour lequel $f(M_1) = 3.00047$) dans le système mentionné ci-dessus, nous trouvons comme solution n un nombre de l'ordre de 4×10^{83}, qui est donc plus petit que le précédent. En fait, il s'agit du plus petit que nous ayons trouvé dans notre recherche de deux nombres 3-abondants consécutifs.

Chapitre 3 : Les nombres puissants consécutifs

3.1 Définitions et résultats utiles

Un entier positif n est dit puissant si pour tout diviseur premier p de n on a $p^2|n$. Les nombres puissants se définissent donc directement à partir de leur représentation canonique, ce qui n'est pas sans poser de difficultés pour les découvrir, puisqu'il faut dès lors connaître toute la factorisation d'un nombre avant de pouvoir déterminer s'il est puissant ou non. Cependant, nous avons tout de même mis au point une méthode fort pratique faisant appel au plus grand commun diviseur et qui permet d'identifier un nombre puissant beaucoup plus rapidement qu'en le factorisant complètement. Ensuite, contrairement à ce qui s'est passé pour les nombres abondants consécutifs, nous donnerons la démonstration d'un résultat général sur les nombres puissants consécutifs avant d'en chercher des exemples en particulier. Peu de travaux ont été menés à ce sujet pour les nombres abondants, ce qui n'est pas le cas pour les nombres puissants, et quelques résultats seront mis de l'avant en guise d'introduction au problème traité dans ce document.

DÉFINITION 3.1 : Un nombre entier plus grand que ou égal à 2 est dit *puissant* si chacun des exposants qui apparaissent dans sa représentation canonique est supérieur à un.

Exemples : $72 = 2^3 \cdot 3^2$ est puissant, alors que $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ ne l'est pas.

DÉFINITION 3.2 : Soit α et n, deux entiers positifs, et p, un nombre premier. On dira que p^α *divise exactement* n si α est le plus grand entier positif pour lequel $p^\alpha|n$, auquel cas on notera $p^\alpha||n$.

DÉFINITION 3.3 : On dira qu'un entier n est *libre de carrés* si chacun des exposants contenus dans sa représentation canonique est égal à un.

DÉFINITION 3.4 : Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a, +\infty)$ (où $a \geq 0$). On dit que $f(x) = O(g(x))$ s'il existe deux constantes $M > 0$ et x_0 telles que $|f(x)| < Mg(x)$ pour tout $x \geq x_0$.

Par exemple, pour une fonction $f(x)$ bornée, on peut dire que $f(x) = O(1)$.

DÉFINITION 3.5 : Pour $s > 1$, on appelle la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ la *fonction zêta de Riemann.*

DÉFINITION 3.6 : On définit la *fonction arithmétique μ de Moebius* de la façon suivante :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } p^2 | n \text{ pour un certain premier } p \\ (-1)^r & \text{si } n = q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_r, \text{ soit } r \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

DÉFINITION 3.7 : Pour un x réel, on note $[x]$ la *fonction partie entière* de x, laquelle désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x.

DÉFINITION 3.8 : Une *équation de Pell* est une équation diophantienne de la forme $x^2 - Dy^2 = 1$, où D est un entier positif différent d'un carré.

THÉORÈME 3.1 (Nagell [17]) : Soit D un entier positif tel que $\sqrt{D}$ est irrationnel. Alors, l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ admet une infinité de solutions.

Les dix plus petits nombres puissants sont $4 = 2^2, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 16 = 2^4, 25 = 5^2, 27 = 3^3, 32 = 2^5, 36 = 2^2 \cdot 3^3, 49 = 7^2$ et $64 = 2^6$. Pour de petits nombres comme ces derniers, la factorisation s'obtient rapidement avec n'importe quel logiciel de calcul. Cependant, cette même opération risque d'être assez longue pour un nombre de 25 chiffres. Heureusement, il est possible d'identifier un nombre puissant sans en déterminer au préalable la représentation canonique. Voici donc l'argumentation menant à un algorithme qui fait appel au plus grand commun diviseur (pgcd) et qui s'avère ainsi plus rapide.

Définissons d'abord le nombre

$$P_k := \prod_{p<10^k} p,$$

où le produit parcourt tous les nombres premiers $p < 10^k$ et où k est un entier positif. Soit maintenant un entier positif n tel que $n < 10^{5k}$. Avant toute chose, remarquons que si n est puissant, alors $(n, P_k)^2 | n$. Donc, dans le cas contraire, c'est-à-dire si $(n, P_k)^2$ ne divise pas n, nous pouvons affirmer que n n'est pas puissant. Ce critère constitue une condition nécessaire à la poursuite de notre algorithme et un premier élément d'évaluation. Étant donné que ce critère n'est pas suffisant, compte tenu du fait que la restriction $n < 10^{5k}$ peut impliquer la présence de nombres premiers $q > 10^k$ dans la factorisation de n, nous devons effectuer d'autres tests avant de conclure.

Supposons donc que $(n, P_k)^2 | n$, auquel cas on peut écrire

$$n = a_k b_k, \text{ où } a_k = \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p < 10^k}} p^\alpha \text{ et } b_k = \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p > 10^k}} p^\alpha.$$

De cette façon, les nombres a_k et b_k sont évidemment puissants et uniques pour chaque n. L'astuce principale de l'algorithme vient de cette dernière écriture du nombre n. En effet, une fois que nous avons vérifié que $(n, P_k)^2 | n$, il suit directement que le nombre a_k est puissant. Il ne nous reste plus qu'à vérifier si l'entier b_k est puissant lui aussi. Or, pour trouver b_k, il suffit de diviser n par tous ses facteurs premiers inférieurs à 10^k. Pour ce faire, on peut tout simplement se servir de l'algorithme suivant : pour commencer, on pose $m = n$ et ensuite on calcule $q = \frac{m}{(m, P_k)}$. Si $q \neq m$, on pose $m = q$ et on recommence le calcul de $q = \frac{m}{(m, P_k)}$. On répète donc ce processus jusqu'à ce que $q = m$, ce qui se produira éventuellement lorsque $(m, P_k) = 1$. À ce moment, nous avons supprimé de la factorisation de n tous les nombres premiers $p \leq 10^k$. C'est alors qu'on obtient $m = b_k$.

Encore une fois, nous allons en quelque sorte contourner le problème de la factorisation de b_k pour savoir s'il est puissant ou non. C'est ici qu'entre en jeu la restriction $n < 10^{5k}$. En rappelant que chaque facteur premier de b_k est supérieur à 10^k et en remarquant aussi que $b_k < 10^{5k}$, nous déduisons que les seules formes possibles de b_k garantissant qu'il est puissant sont

$$b_k = p^2, p^3, p^4 \text{ et } p^2 q^2,$$

où p et q sont des nombres premiers supérieurs à 10^k. Or, l'avènement de l'une ou de l'autre de ces possibilités est équivalent au fait que la racine carrée ou cubique de b_k est un entier.

La procédure décrite précédemment est comprise dans ce programme écrit en MATHEMATICA :

f[n_]:= If[IntegerQ[n/GCD[pk,n]^2], $If[\{m = n; While[(q = m/GCD[pk, m])! = m, m = q]\}; IntegerQ[Sqrt[m]]||IntegerQ[m^{1/3}], 1, 0], 0]$,

laquelle fonction $f : [2, 10^{5k}] \to \{0, 1\}$ définit la fonction

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est puissant,} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

REMARQUES :

1. Pour identifier par exemple les nombres puissants de 9 chiffres et moins avec cet algorithme, il suffit de connaître les 25 premiers nombres premiers, en d'autres termes $P_2 = \prod_{p<100} p$. Toutefois, l'expérience montre qu'il est plus rapide de faire plutôt usage de P_4, car dans ce cas le processus s'arrêtera plus souvent dès la première condition, c'est-à-dire que $\frac{n}{(P_4,n)^2}$ soit un entier. De cette façon, on évitera le calcul des racines carrée et cubique de m. De plus, le calcul de (n, P_4) est extrêmement rapide.

2. Le calcul de P_k (ou pk dans le programme ci-dessus) peut se faire comme ceci à l'aide du logiciel de calcul MATHEMATICA :

pk=1;i=1;While[(p=Prime[i])<10^4, $(pk = pk * p)\&\&(i++)$]
(c'est le cas $k = 4$).

3. En utilisant le logiciel de calcul MATHEMATICA, nous avons comparé le temps requis pour compter le nombre de nombres puissants compris entre 900000 et 1000000, en factorisant dans un premier temps tous ces nombres et dans un deuxième temps en utilisant notre algorithme. Pour compter ces 108 nombres, la première méthode a pris 120 secondes, tandis que la deuxième n'a pris que 86 secondes.

Aussi, la littérature abonde de résultats concernant les nombres puissants (voir en particulier Guy [11]). Toutefois, dans ce travail, nous nous attarderons davantage à la distribution des nombres puissants consécutifs.

Une questions à la fois simple et naturelle que l'on peut se poser sur la suite des nombres puissants est certainement de se demander combien il y en a approximativement par rapport aux entiers naturels. À cet effet, nous pouvons rapidement calculer, à l'aide de notre algorithme, qu'il y a par exemple 3 nombres puissants inférieurs à 10, 53 inférieurs à 1000 et 618 inférieurs à 100000. De façon générale, nous allons montrer que le nombre de nombres puissants $\leq x$, que nous noterons $P(x)$, est de l'ordre de $\sqrt{x}$.

THÉORÈME 3.2 : Lorsque $x \to \infty$,

$$P(x) = C\sqrt{x} + O(x^{1/3}), \text{ où } C = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \approx 2.17.$$

DÉMONSTRATION : Remarquons d'abord que tout nombre puissant n peut s'écrire de manière unique sous la forme $n = m^2r^3$, pour un certain entier positif m et un certain entier positif r libre de carrés.

On a donc que

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{m^2r^3 \leq x} \mu^2(r) = \sum_{r^3 \leq x} \mu^2(r) \sum_{m^2 \leq x/r^3} 1 = \sum_{r \leq x^{1/3}} \mu^2(r) \left[\frac{\sqrt{x}}{r^{3/2}}\right] \\
&= \sum_{r \leq x^{1/3}} \mu^2(r) \left(\frac{\sqrt{x}}{r^{3/2}} + O(1)\right) = \sqrt{x} \sum_{r \leq x^{1/3}} \frac{\mu^2(r)}{r^{3/2}} + O(x^{1/3}) \\
&= \sqrt{x} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r^{3/2}} - \sum_{r > x^{1/3}}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r^{3/2}}\right) + O(x^{1/3}) \\
&= \sqrt{x} \left(\frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} - R(x)\right) + O(x^{1/3}),
\end{aligned}$$

où $R(x) = \sum_{r > x^{1/3}}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r^{3/2}} = O\left(\int_{r > x^{1/3}}^{\infty} t^{-3/2} dt\right) = O(x^{-1/6})$.

On obtient ainsi

$$P(x) = \sqrt{x}\frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} + O(\sqrt{x} \cdot x^{-1/6}) + O(x^{1/3}) = \sqrt{x}\frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} + O(x^{1/3}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le tableau qui suit, on retrouve la valeur exacte de $P(10^k)$, pour chaque entier positif $k \leq 7$, de même que la partie entière de la valeur correspondante prédite par le terme principal de la formule donnée dans le théorème 3.2, soit $\sqrt{x} \cdot \zeta(3/2)/\zeta(3)$.

Tableau 6 : Valeurs de $P(x)$ et de $[\sqrt{x} \cdot \zeta(3/2)/\zeta(3)]$ pour $x = 10^k$ avec $1 \leq k \leq 7$

x	$P(x)$	$[\sqrt{x} \cdot \zeta(3/2)/\zeta(3)]$
10	3	6
10^2	13	21
10^3	53	68
10^4	184	217
10^5	618	687
10^6	2026	2173
10^7	6552	6872

3.2 Résultats préliminaires sur les nombres puissants consécutifs

Une équation diophantienne toute simple permet d'obtenir des nombres puissants consécutifs. Plus précisément, considérons l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Elle constitue un cas particulier des équations de Pell qui sont définies dans la section précédente. Ce qui nous intéresse n'est pas seulement de trouver des nombres puisssants consécutifs, mais aussi de savoir s'il existe une infinité de nombres n tels que n et $n+1$ sont puissants. Le théorème 3.1 répond à cette question dans l'affirmative. D'après ce théorème, l'équation de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$ possède une infinité de solutions. Considérons alors une solution $x = a \neq 1$ et $y = b \neq 0$ de cette équation diophantienne. Ainsi, $a^2 - 2b^2 = 1$, de sorte que les nombres $2b^2$ et a^2 sont consécutifs. Il ne reste plus qu'à démontrer que ces nombres sont puissants. Par définition, a^2 est un nombre puissant, tout comme b^2. Est-ce le cas pour le nombre $2b^2$? Pour qu'il soit puissant, il faut que b soit pair, car sinon, l'exposant affecté au nombre premier 2 dans la représentation canonique de $2b^2$ sera 1, ce qui n'est évidemment pas conforme à la définition d'un nombre puissant. Or, on peut facilement montrer que b doit être pair à partir de l'équation $a^2 - 2b^2 = 1$. Premièrement, $a^2 = 2b^2 + 1$ implique que a^2 est impair et donc que a l'est aussi. Deuxièmement, $2b^2 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, soit le produit de deux nombres pairs $a-1$ et $a+1$. On en déduit que $2b^2$ est divisible par 4. Cela implique en particulier que b^2 est pair, et donc que b est pair, ce qui complète la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.3 : Il existe une infinité de couples de nombres puissants de la forme $\{n, n+1\}$.

Regardons maintenant quels sont les premiers couples de nombres puissants consécutifs. La première fois que deux nombres entiers consécutifs sont puissants survient pour $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$. Ces deux nombres peuvent être trouvés à partir de la solution $x = 3, y = 2$ de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$, mais est-ce toujours le cas des nombres puissants consécutifs ? Cette question sera approfondie plus en détail dans les paragraphes suivants. Pour l'instant, nous allons présenter une méthode pour générer une infinité de solutions de cette équation et ce, à partir d'une solution de départ $(x, y) = (a, b)$. Soit donc a et b des entiers positifs tels que $a^2 - 2b^2 = 1$. On affirme que $x = 3a + 4b$ et $y = 2a + 3b$ est une autre solution de notre équation. En effet, nous avons $x^2 - 2y^2 = (3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 = a^2 - 2b^2$. Maintenant, partant de la solution (3, 2), nous pouvons générer une infinité de solutions et du même coup une infinité de couples de nombres puissants consécutifs. Le premier couple $\{8, 9\}$ nous amène ensuite à $\{288, 289\}$, en considérant premièrement la solution $x_1 = 3(3)+4(2) = 17$, $y_1 = 2(3)+3(2) = 12$ et en rappelant qu'ainsi les nombres $2y_1^2$ et x_1^2 seront puissants consécutifs. Par la suite, on obtient successivement les couples $\{288, 289\}$, $\{9800, 9801\}$, $\{332928, 332929\}$, $\{11309768, 11309769\}$ et ainsi de suite.

REMARQUE : il est facile de montrer, en partant de la solution minimale $(x_1, y_1) = (3, 2)$, qu'on peut obtenir les solutions récurrentes (x_n, y_n) à partir de l'équation $x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$. Par exemple, on aura $x_2 + y_2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2}$, d'où la solution $x_2 = 17$ et $y_2 = 12$. Cette méthode sera par ailleurs approfondie dans la section suivante.

En recherchant les paires $n, n+1$ de nombre puissants consécutifs pour $n < 10^7$ à l'aide d'un logiciel de calcul, on s'aperçoît rapidement que les solutions générées dans le paragraphe précédent ne nous donnent pas toutes les paires de nombres puissants consécutifs. À cet effet, on peut consulter le tableau 7.

Tableau 7 : Liste des paires de nombres puissants de la forme $\{n, n+1\}$ ainsi que leur représentation canonique pour $n < 10^7$

n	$n+1$
$8 = 2^3$	$9 = 3^2$
$288 = 2^5 \cdot 3^2$	$289 = 17^2$
$675 = 3^3 \cdot 5^2$	$676 = 2^2 \cdot 13^2$
$9800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$	$9801 = 3^4 \cdot 11^2$
$12167 = 23^3$	$12168 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13^2$
$235224 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 11^2$	$235225 = 5^2 \cdot 97^2$
$332928 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 17^2$	$332929 = 577^2$
$465124 = 2^2 \cdot 11^2 \cdot 31^2$	$465125 = 5^3 \cdot 61^2$
$1825200 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2$	$1825201 = 7^2 \cdot 193^2$

Par contre, en observant attentivement la factorisation de ces paires de nombres, nous remarquons que dans tous les cas sauf un (12167 et 12168), nous pouvons leur associer une équation diophantienne de la forme $x^2 - p^3y^2 = \pm 1$. Par exemple, $676 - 675 = 2 \cdot 13^2 - 3^3 \cdot 5^2 = 1$. Ceci nous amène à étaler la théorie générale permettant de trouver, lorsqu'elles existent, les solutions aux équations de Pell. Cette théorie sera exposée en quatre parties. La première, qui constitue l'essentiel de la section suivante, nous introduira aux fractions continues. En plus de contribuer à la démonstration du Théorème 3.1 du point de vue de l'existence d'une solution, les définitions et les résultats qui y sont exposés nous permettront de trouver explicitement une solution à toute équation de la forme exprimée dans le théorème 3.1. Une fois que nous connaissons une solution de ce type d'équation, en particulier une solution que nous appellerons *fondamentale*, il est possible de générer toutes les autres. Les résultats à cet effet feront l'objet de la deuxième partie, laquelle est présentée à la section 3.4. Nous étant jusque là contentés des équations de Pell de la forme $x^2 - Dy^2 = 1$, nous étendrons par la suite notre travail dans la section 3.4 aux équations diophantiennes plus générales de la forme $x^2 - Dy^2 = \pm k$. Ces dernières nous permettent par exemple de trouver des nombres puissants impairs et consécutifs dans le cas $k = 2$. Finalement, nous compléterons notre étude en considérant des équations diophantiennes de la forme $ax^2 - by^2 = \pm c$ pour des nombres entiers positifs a et b bien choisis, cela de manière à obtenir des nombres puissants consécutifs qui ne sont pas des carrés parfaits. Cette dernière partie mettra un terme à la section 3.4 portant sur les nombres puissants consécutifs.

3.3 Fractions continues

Il est admis que l'étendue des applications mathématiques découlant de la notion de fraction continue dépasse largement les brefs résultats que nous nous contenterons d'exposer ici. En fait, on peut dire que cette branche de la théorie des nombres ne nous sera surtout utile que pour un théorème, soit celui affirmant que tout nombre irrationnel a une représentation unique comme fraction continue infinie. Par contre, les fractions continues nous seront très utiles pour déterminer explicitement des paires de nombres puissants consécutifs. Pour cela, nous devons tout d'abord définir les fractions continues finies.

DÉFINITION 3.9 : Une expression de la forme

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

où les a_i sont des nombres complexes différents de zéro, est appellée *fraction continue finie* (elle est dite *simple* si tous les a_i sont des entiers).

Notons que d'après cette définition, une fraction continue simple finie représente évidemment un nombre rationnel. Le résultat inverse est aussi vrai.

THÉORÈME 3.4 (De Koninck et Mercier [5]) : Tout nombre rationnel peut s'écrire comme une fraction continue simple finie.

Ce résultat se retrouve dans tous les livres de base en théorie des nombres. Cela dit, comme nous utiliserons sa démonstration dans un programme un peu plus tard, nous avons décidé d'en donner les détails ici. La démonstration de ce théorème est toute simple et ne fait intervenir que l'algorithme d'Euclide. Pour l'illustrer, prenons le nombre rationnel a/b, avec $(a,b) = 1$ et $b > 0$. En appliquant l'algorithme d'Euclide, on obtient successivement les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
a = a_1 b + b_1, & 0 < b_1 < b \\
b = a_2 b_1 + b_2, & 0 < b_2 < b_1 \\
b_1 = a_3 b_2 + b_3, & 0 < b_3 < b_2 \\
\qquad \vdots & \qquad \vdots \\
b_{n-3} = a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1}, & 0 < b_{n-1} < n_{n-2} \\
b_{n-2} = a_n b_{n-1}. &
\end{array}$$

Comme tous les b_i sont des entiers positifs, on en déduit que les termes $a_2, ..., a_n$ sont eux aussi des entiers positifs. Nous pouvons donc réécrire les équations présentées ci-dessus de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a_1 + \frac{b_1}{b} \\
\frac{b}{b_1} &= a_2 + \frac{b_2}{b_1} \\
\frac{b_1}{b_2} &= a_3 + \frac{b_3}{b_2} \\
\vdots &\quad \vdots \\
\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} &= a_n.
\end{aligned}$$

Enfin, par des substitutions successives, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a_1 + \frac{1}{(b/b_1)} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{(b_1/b_2)}} \\
&\vdots \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression à plusieurs étages s'appelle le *développement du nombre a/b en fraction continue* (elle est dite *simple* si tous les a_i sont des entiers, $1 \leq i \leq n$). Afin d'alléger son écriture, on utilise l'abréviation $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

REMARQUE : Il est possible de représenter un nombre rationnel comme fraction continue simple finie de deux manières différentes. En effet, si nous prenons $a/b = [a_1, a_2, ..., a_n]$ avec $a_n > 1$, on peut écrire

$$a_n = a_n - 1 + 1 = a_n - 1 + \frac{1}{1},$$

de sorte que

$$a/b = [a_1, a_2, ..., a_n] = [a_1, a_2, ..., a_n - 1, 1].$$

Autrement dit, un nombre rationnel peut être représenté par deux fractions continues simples finies, l'une contenant un nombre pair d'entiers et l'autre un nombre impair.

DÉFINITION 3.10 : Une fraction continue simple finie formée à partir de $[a_1, a_2, ..., a_n]$ en enlevant tous les termes qui suivent un terme donné est appellée *réduite de la fraction* $[a_1, a_2, ..., a_n]$. On note $C_1 = [a_1]$ la *première réduite de* $[a_1, a_2, ..., a_n]$ et en général $C_k = [a_1, a_2, ..., a_k]$, $1 \leq k \leq n$, la *k-ième réduite de la fraction* $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Étant donné que les termes définis ci-dessus nous seront d'une grande utilité pour trouver des solutions aux équations de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$, nous allons maintenant exposer un outil pour déterminer rapidement à quel nombre rationnel correspond une k-ième réduite donnée. Calculons tout d'abord les quatre premières réduites de $[a_1, a_2, ..., a_n]$:

$$\begin{aligned}
C_1 &= [a_1] = a_1, \\
C_2 &= [a_1, a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}, \\
C_3 &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 + \frac{1}{a_2 + (1/a_3)} = \frac{(a_1 a_2 + 1) \cdot a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}, \\
C_4 &= [a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{((a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1) \cdot a_4 + (a_1 a_2 + 1)}{(a_2 a_3 + 1) \cdot a_4 + a_2}.
\end{aligned}$$

De façon à simplifier ces dernières expressions, nous définissons deux suites récurrentes $\{p_k\}$ et $\{q_k\}$:

$$\begin{aligned}
p_0 = 1,\, p_1 = a_1,\, p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \text{ où } n \geq 2, \\
q_0 = 0,\, q_1 = 1,\, q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \text{ où } n \geq 2.
\end{aligned}$$

En y regardant de plus près, on constate que ce choix judicieux est tel que

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1},\, C_2 = \frac{p_2}{q_2},\, C_3 = \frac{p_3}{q_3},$$

et qu'en utilisant une récurrence simple, on démontre facilement le résultat général suivant.

THÉORÈME 3.5 (De Koninck et Mercier [5]) : Si C_k est la k-ième fraction réduite de la fraction continue simple finie $[a_1, a_2, ..., a_n]$, alors on a

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}, \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous avons vu que tout nombre rationnel peut s'exprimer comme une fraction continue simple finie. Voyons maintenant ce que nous pouvons faire avec les nombres irrationnels et les fractions continues infinies.

THÉORÈME 3.6 (De Koninck et Mercier [5]) : Soit $a_1, a_2, a_3, ...$, une suite infinie d'entiers positifs, sauf peut-être a_1. Soit $C_n = [a_1, a_2, ..., a_n]$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} C_n$ existe et est finie.

DÉFINITION 3.11 : Soit $a_1, a_2, a_3, ...$, une suite infinie d'entiers positifs, sauf peut-être a_1. On définit la limite de l'expression $[a_1, a_2, ..., a_n]$ lorsque n tend vers l'infini comme étant une *fraction continue simple infinie.*

THÉORÈME 3.7 (De Koninck et Mercier [5]) : Toute fraction continue simple infinie représente un nombre irrationnel.

Tout comme pour les fractions continues simples finies et les nombres rationnels, l'implication inverse du théorème 3.7 est vraie. D'ailleurs, il existe un algorithme astucieux qui permet de le démontrer. Puisqu'il nous sera utile par la suite dans un programme, nous en donnons ici tous les détails.

Soit α_1 un nombre irrationnel. Nous voulons construire une suite de nombres a_k telle que la fraction continue simple infinie $[a_1, a_2, a_3, ...]$ converge vers α_1. Pour ce faire, on définit d'abord la suite d'entiers α_k comme ceci :

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - [\alpha_1]},\ \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - [\alpha_2]},\ \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - [\alpha_3]},\ ...$$

On pose ensuite

$$a_1 = [\alpha_1],\ a_2 = [\alpha_2],\ a_3 = [\alpha_3],\ ...$$

En somme, on a la relation suivante :

$$a_k = [\alpha_k], \text{ où } \alpha_k = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \text{ et } k \geq 1.$$

Montrons maintenant que cette construction mène au résultat escompté. Remarquons premièrement que α_k représente un nombre irrationnel pour tout $k \geq 1$, et que

$$0 < \alpha_k - a_k = \alpha_k - [\alpha_k] < 1.$$

Nous en déduisons que

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} > 1,$$

et donc que cette construction nous assure que les entiers $a_2, a_3, a_4, ...$ sont tous positifs. La relation de récurrence de la forme

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$$

nous donne donc par des substitutions successives

$$\alpha_1 = [a_1, \alpha_2] = [a_1, a_2, \alpha_3] = ... = [a_1, a_2, ..., a_{m-1}, \alpha_m].$$

Or, si on pose $\alpha = C_m$ comme étant la m-ième réduite de $[a_1, a_2, ..., a_{m-1}, \alpha_m]$, il s'ensuit que

$$\alpha = [a_1, a_2, ..., a_{n-1}, \alpha_n] = C_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + \alpha n - 2}.$$

Finalement, on peut écrire pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \alpha - C_{n-1} &= \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + \alpha n - 2} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \\ &= -\frac{p_{n-1}q_{n-1} - p_{n-2}q_{n-1}}{q_{n-1}(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2})} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2})}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité nous permet de conclure que $\alpha - C_{n-1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, car $\alpha_n > 0$ pour $n \geq 2$ et q_n est une suite décroissante. En fait, nous avons établi la relation

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} [a_1, a_2, ..., a_n],$$

d'où le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 3.8 (De Koninck et Mercier [5]) : Tout nombre irrationnel possède une représentation unique en fraction continue infinie.

Les étapes menant au dernier résultat sont comprises dans le programme écrit en MATHEMATICA ci-dessous. Remarquons que dans l'exemple d'utilisation donné, le programme rend les 10 premiers termes de la fraction continue infinie représentant la racine carrée de 12167, de même que les nombres p_{10} et q_{10} définissant la dixième réduite (C_{10}) de $\sqrt{12167}$.

```
k=1; fc={};
α=Sqrt[12167];
```

```
a=IntegerPart[α];
φ=1;
p=IntegerPart[α];
χ=0; q=1; P=0; Q=0;
While[k <= 10,(fc=Join[fc,{a}])&&(α=1/(α-a))&&
    (a=IntegerPart[α])&&
    (P=a*p+φ)&&(Q=a*q+χ])&&
    (φ]=p)&&(p=P)&&(χ=q)&&(q=Q)&&
    (k++)];
    Print[fc," ","p= ",φ]," q=",χ]]
```

$$110, 3, 3, 2, 8, 19, 1, 14, 1, 4 \;\; p = 33903848 \; q = 307367$$

Il est intéressant de noter qu'avec ces dix premiers termes, la réduite

$$C_{10} = 110.3041250361945\ldots, \text{ alors que}$$

$$\sqrt{12167} = 110.3041250361925\ldots$$

Il existe une foule de propriétés connues au sujet des nombres C_k, p_k et q_k, la plupart trouvant leur utilité dans la recherche des racines rationnelles des polynômes ou encore dans l'approximation des nombres irrationnels. Certes, quelques-unes de ces propriétés sont utilisées dans la démonstration des prochains résultats, mais comme seuls les énoncés de ces théorèmes nous serviront, nous avons omis de les présenter. En d'autres termes, nous passons dès maintenant aux applications de cette théorie aux équations de Pell.

3.4 Équations diophantiennes et nombres puissants consécutifs

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour étudier et résoudre explicitement certaines équations diophantiennes. Nous verrons donc dans cette section comment générer des suites infinies de couples de nombres puissants consécutifs en utilisant ces équations. De plus, nous donnerons plusieurs résultats sur l'existence de solutions pour des types bien précis d'équations diophantiennes, qui nous donneront par le fait même des indications sur les différentes formes que peuvent prendre les nombres puissants consécutifs en général.

THÉORÈME 3.9 (Shockley [19]) : Soit D un entier positif qui n'est pas un carré, et n, un entier tel que $|n| < \sqrt{D}$. Si $x = x_0$ et $y = y_0$ est une solution positive de $x^2 - Dy^2 = n$, alors x_0/y_0 est une des fractions réduites (c'est-à-dire C_k pour un certain k) de $\sqrt{D}$.

De ce théorème, il suit que si x_0, y_0 est une solution positive de $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, alors $x_0 = p_n$ et $y_0 = q_n$, où p_n/q_n est une fraction réduite de $\sqrt{D}$. Cette implication vient du fait que $x_0/y_0 = p_n/q_n$ et que $(x_0, y_0) = (p_n, q_n) = 1$. De façon plus générale, on a le résultat suivant au sujet des équations de la forme $x^2 - Dy^2 = \pm 1$.

THÉORÈME 3.10 (Shockley [19]) : Soit D un entier positif qui n'est pas un carré. Soit m la longueur de la période de la fraction continue simple infinie représentant $\sqrt{D}$.

(a) Si m est pair, alors les solutions positives de $x^2 - Dy^2 = 1$ sont

$$x = p_{km},\ y = q_{km}\ \text{(k=1,2,3, ...)},$$

et l'équation diophantienne $x^2 - Dy^2 = -1$ ne possède pas de solution.

(b) Si m est impair, alors les solutions positives de $x^2 - Dy^2 = 1$ sont

$$x = p_{km},\ y = q_{km}\ \text{(k=2,4,6, ...)},$$

et les solutions positives de $x^2 - Dy^2 = -1$ sont

$$x = p_{km},\ y = q_{km}\ \text{(k=1,3,5, ...)}.$$

Grâce à ce dernier résultat, nous pouvons donc déterminer toutes les solutions positives aux équations diophantiennes de la forme $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, lorsqu'elles existent. Dans notre cas, nous pouvons ajouter que ce théorème s'avère être un outil très pratique pour trouver explicitement des nombres puissants consécutifs. Pour ce faire, il suffit de choisir D comme étant un nombre 3-puissant (voir la définition 3.12 ci-dessous), sans qu'il ne soit bien sûr un carré, et de déterminer la période de la fraction continue qui lui est associée.

DÉFINITION 3.12 : Un nombre entier plus grand que ou égal à 2 est dit *k-puissant* si chacun des exposants qui apparaissent dans sa représentation canonique est supérieur ou égal à k.

Pour illustrer l'utilité du théorème 3.10, nous allons déterminer tous les couples de nombres puissants consécutifs $\{n, n+1\}$ tels que l'un est un carré parfait et l'autre de la forme $27m^2$. Dans un premier temps, il faut trouver la période de la fraction continue infinie représentant $\sqrt{27}$. En utilisant le programme montré précedemment, on constate que les 10 premiers termes de cette fraction continue infinie sont $5, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10$ et 5, de sorte que sa période est 2. Comme cette période est paire, on en déduit que l'équation diophantienne $x^2 - 27y^2 = -1$ ne possède pas de solution, et par le fait même qu'il ne peut exister de carré parfait précédent immédiatement un nombre puissant de la forme $27m^2$. Les seuls couples de nombres puissants possibles s'obtiennent donc successivement à partir des couples (p_2, q_2), (p_4, q_4), (p_6, q_6) et ainsi de suite, les trois premiers étant

$$675 = 3^3 \cdot 5^2 \text{ et } 676 = 2^2 \cdot 13^2,$$
$$1825200 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \text{ et } 1825201 = 7^2 \cdot 193^2,$$
$$4931691075 = 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17^2 \cdot 53^2 \text{ et } 4931691076 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 37^2 \cdot 73^2.$$

Il existe cependant une formule générale qui n'utilise que la solution fondamentale (voir la définition ci-dessous) de l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ pour générer toutes ses solutions positives. De plus, cette formule nous mènera vers la théorie qui nous permettra de déterminer explicitement des solutions (lorsqu'elles existent) aux équations diophantiennes de la forme $x^2 - Dy^2 = \pm k$, avec $k > 1$.

DÉFINITION 3.13 : La *solution fondamentale* x_1, y_1 de l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ est celle pour laquelle x_1 et y_1 sont les plus petits nombres entiers positifs possibles satisfaisant cette dernière.

Ainsi, on déduit du théorème 3.10 que si m est la longueur de la période du développement de $\sqrt{D}$ comme fraction continue simple, alors la solution fondamentale de l'équation de Pell est $x_1 = p_m$, $y_1 = q_m$ lorsque m est pair ou encore $x_1 = p_{2m}$, $y_1 = q_{2m}$ dans le cas inverse.

THÉORÈME 3.11 (Shockley [19]) : Si D est un entier positif tel que sa racine carrée est irrationnelle, alors toutes les solutions positives x_n, y_n de l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ sont données par la formule

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n,$$

où x_1, y_1 est la solution fondamentale de $x^2 - Dy^2 = 1$.

En utilisant le théorème 3.11, il n'est donc plus nécessaire de calculer les réduites p_{km}/q_{km} pour $k = 2, 3, 4, ...$, mais seulement la réduite p_m/q_m (où m correspond à la période de la fraction continue associée à $\sqrt{D}$) pour obtenir nos solutions et du même coup les nombres puissants consécutifs. De plus, cela peut devenir un avantage en terme de temps, car le calcul des réduites p_j/q_j est un peu plus long que le simple calcul donné dans le théorème 3.11, à condition évidemment d'utiliser l'ordinateur. Voyons maintenant un résultat complémentaire qui comprend en prime le cas $x^2 - Dy^2 = -1$.

THÉORÈME 3.12 (Nagell [17]) : Soit D un nombre entier positif qui n'est pas un carré parfait. Supposons que l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$ est résoluble et que ξ_1, η_1 est sa solution fondamentale. Alors, les nombres x_1, y_1 définis par l'équation

$$x_1 + y_1\sqrt{D} = (\xi_1 + \eta_1\sqrt{D})^2 = \xi_1^2 + D(\eta_1)^2 + 2\xi_1\eta_1\sqrt{D}$$

constituent la solution fondamentale de $x^2 - Dy^2 = 1$. De plus, si on écrit

$$\xi_n + \eta_n\sqrt{D} = (\xi_1 + \eta_1\sqrt{D})^n,$$

on obtient :

(a) toutes les solutions positives ξ, η de $x^2 - Dy^2 = -1$ lorsque n parcourt tous les entiers positifs impairs;

(b) toutes les solutions positives $x = \xi_n$, $y = \eta_n$ de $x^2 - Dy^2 = 1$ lorsque n parcourt tous les entiers positifs pairs.

De manière plus générale, on a :

THÉORÈME 3.13 : Si p est un nombre premier de la forme $4n + 1$, alors l'équation diophantienne

$$\xi^2 - p^3\eta^2 = -1 \tag{3}$$

possède toujours des solutions entières ξ et η.

DÉMONSTRATION : Soit x_1, y_1, la solution fondamentale de l'équation

$$x^2 - p^3y^2 = 1. \tag{4}$$

Ainsi, on a l'égalité suivante :

$$x_1^2 - 1 = p^3y_1^2. \tag{5}$$

De cette dernière équation, on déduit que x_1 est impair. En effet, comme x_1, y_1 est une solution de l'équation (4) et que, par hypothèse, p est impair, on en conclu tout d'abord qu'ils sont de parité opposée. Donc, en supposant que x_1 est pair, on aurait la relation contradictoire $x_1^2 - 1 \equiv -1 \equiv p^3y_1^2 \equiv p^3(\pm 1)^2 \equiv p^3 \pmod 4$, ou plus simplement $-1 \equiv p^3 \pmod 4$. Ainsi, comme x_1 est impair, il suit que $(x_1 - 1, x_1 + 1) = 2$. De l'équation (5), on a donc

$$x_1 \pm 1 = 2\xi^2,\ x_1 \mp 1 = 2p^3\eta^2,$$

où ξ et η sont des entiers naturels et $y_1 = 2\xi\eta$. En éliminant x_1 de ces deux dernières équations, on obtient :

$$\pm 1 = \xi^2 - p^3\eta^2.$$

Or, en remarquant que $y_1 > \eta$, on peut exclure le cas positif (du signe $\pm$). On se retrouve donc avec $-1 = \xi^2 - p^3\eta^2$, et le théorème est démontré. De plus, on sait par l'entremise du théorème 3.12 que la solution ξ, η est la solution fondamentale de l'équation (3).

REMARQUE : La dernière démonstration tient aussi pour l'équation diophantionne $x^2 - py^2 = -1$ avec $p \equiv 1 \pmod 4$. (Voir Legendre [13]).

En guise d'exemple, nous allons maintenant montrer qu'il n'existe pas de nombres puissants consécutifs $n, n+1$ tels que n soit de la forme $27a^2$ et $n+1$ de la forme b^2. Considérons donc l'équation diophantienne

$$\xi^2 - 27\eta^2 = -1 \tag{6}$$

et montrons qu'elle ne possède pas de solution. Comme nous l'avons déjà vu, la solution fondamentale de l'équation de Pell $x^2 - 27y^2 = 1$ est $x_1 = 26$, $y_1 = 5$. En supposant que l'équation (6) est résoluble et que sa solution fondamentale est ξ_1, η_1, on aurait, selon le théorème 3.11,

$$26 = \xi_1^2 + 27\eta_1^2,\ 5 = 2\xi_1\eta_1.$$

Étant donné que ce système d'équation ne possède pas de solution, on en conclut directement que l'équation (6) n'est pas résoluble.

Par ailleurs, il existe un résultat concernant les nombres premiers de la forme $4n+3$ qui aurait pu suffire pour conclure que l'équation (6) n'est pas résoluble.

THÉORÈME 3.14 : Si p est un nombre premier de la forme $4n+3$, alors l'équation diophantienne $x^2 - p^3y^2 = -1$ ne possède pas de solution.

DÉMONSTRATION : Remarquons tout d'abord que p^3 est aussi de la forme $4n+3$. Il est clair que si a et b sont tels que $a^2 - p^3y^2 = -1$, alors ils n'ont pas la même parité. En notant que les carrés parfaits pairs sont tous de la forme $4n$, et que les carrés parfaits impairs sont tous de la forme $4n+1$, on déduit qu'il n'y a que deux cas à considérer. Si a^2 est de la forme $4n$, alors l'expression $a^2 - p^3y^2$ est de la forme $4n - (4n+3)(4n+1)$, ou plus simplement $4n+1$. De cette façon, on ne pourra jamais obtenir -1 pour l'expression. Dans l'autre cas, l'expression sera de la forme $4n+1-(4n+3)(4n)$, ou encore $4n+2$, donc elle aussi toujours différente de -1. Le théorème est par le fait même démontré.

Afin de compléter la présente théorie, nous allons maintenant exposer quelques résultats utiles pour trouver explicitement des couples de nombres puissants de la forme $\{n, n+k\}$. De plus, comme pour le cas $\{n, n+1\}$, il sera question de quelques moyens qui nous permettront d'éliminer de nos recherches certaines formes de nombres puissants.

THÉORÈME 3.15 (Nagell [17]) : Soit l'équation diophantienne

$$u^2 - Dv^2 = N, \tag{7}$$

où D n'est pas un carré parfait et N est un entier non nul. Soit de plus u, v, une solution de (7) (en supposant que (7) est résoluble). Si x, y est une solution de l'équation de Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1, \tag{8}$$

alors $uy + vx$ est aussi une solution de (7).

THÉORÈME 3.16 (Nagell [17]) : Soit K un entier positif et D un entier positif qui n'est pas un carré parfait. Si u, v est la solution fondamentale de l'équation diophantienne

$$u^2 - Dv^2 = K, \tag{9}$$

et si x_1, y_1 est la solution fondamentale de l'équation (8), alors on a les inégalités suivantes :

$$0 \leq v \leq \frac{y_1\sqrt{K}}{\sqrt{2(x_1+1)}}, \tag{10}$$

$$0 < |u| \leq \sqrt{1/2(x_1+1)K}. \tag{11}$$

THÉORÈME 3.17 (Nagell [17]) : Soit K un entier positif et D un entier positif qui n'est pas un carré parfait. Si u, v est la solution fondamentale de l'équation diophantienne

$$u^2 - Dv^2 = -K, \tag{12}$$

et si x_1, y_1 est la solution fondamentale de l'équation (8), alors on a les inégalités suivantes :

$$0 \leq v \leq \frac{y_1\sqrt{K}}{\sqrt{2(x_1-1)}}, \tag{13}$$

$$0 < |u| \leq \sqrt{1/2(x_1-1)K}. \tag{14}$$

En d'autres termes, les deux derniers résultats nous assurent que nous pouvons trouver (lorsqu'elle existe) la solution fondamentale des équations (9) et (12), grâce à un nombre fini d'étapes. Ces mêmes équations ne possèderont donc aucune solution dans les cas où les inégalités correspondantes (10) et (11) ou (13) et (14) n'auront pas elles-mêmes une solution les vérifiant. De plus, il ne faut pas oublier le théorème 3.9 comme autre outil de recherche, bien qu'il soit beaucoup moins efficace.

Exemple : Existe-t-il des solutions à l'équation diophantienne $x^2 - 27y^2 = 2$?

On a déjà vu que la solution fondamentale de l'équation de Pell $x^2 - 27y^2 = 1$ est $x_1 = 26$ et $y_1 = 5$. Donc, s'il existe des entiers u et v tels que $u^2 - 27v^2 = 2$, alors ils doivent répondre aux deux inéquations suivantes (Théorème 3.16) :

$$0 < |u| \leq \sqrt{1/2(26+1)2} = \sqrt{27} < 6,$$

$$0 \leq v \leq \frac{5}{\sqrt{2(26+1)}} \cdot \sqrt{2} < 1.$$

Or, il est évident que v doit être plus grand que 1 pour avoir une solution. On peut donc conclure en affirmant que cette équation diophantienne ne possède pas de solution.

Dans le prochain chapitre, nous traiterons rapidement de la question des suites de plus de deux nombres puissants consécutifs. Essentiellement, nous nous demanderons s'il existe des nombres puissants n tels que $n+1$ et $n+2$ soient eux aussi des nombres puissants. Or, il va de soi qu'une condition nécessaire à l'existence de tels entiers naturels n est que $n+2$ soit puissant, c'est pourquoi nous nous attardons ici plus en détail aux équations diophantiennes de la forme $x^2 - Dy^2 = \pm 2$.

Avant d'aller plus loin, il est important de mentionner que si deux nombres entiers positifs n et $n+2$ sont puissants, alors ils sont nécessairement impairs. Propriété triviale, compte tenu du fait que les nombres puissants pairs sont tous divisibles par 4. Aussi, comme nous serons en mesure de le constater, les nombres impairs consécutifs et puissants sont relativement rares. Heureusement, nous avons à notre disposition une foule de résultats fortement inspirés des travaux de Legendre [13]. En fait, nos démonstrations sont essentiellement les mêmes que dans ce dernier ouvrage, sauf que dans notre cas, nous utilisons p^3 au lieu de p, avec p premier.

THÉORÈME 3.18 : Soit p un nombre premier impair. Alors, les deux équations diophantiennes

$$x^2 - p^3y^2 = \pm 2 \tag{15}$$

possèdent toujours des solutions si p est de la forme $4n+3$, et elles n'en possèdent jamais si p est de la forme $4n+1$. Le signe du second membre de l'équation (15) sera positif dans le cas où p est de la forme $8n+7$ et négatif dans le cas où p est de la forme $8n+3$.

DÉMONSTRATION : On sait que toute solution x, y de l'équation (15) ne comporte que des nombres impairs. Si p est de la forme $4n+1$, alors l'expression $x^2 - p^3y^2$ sera toujours de la forme $4n$. On en conclut donc que l'équation (15) ne possèdera jamais de solution x, y pour ce type de nombre premier.

Supposons donc que p est de la forme $4n+3$. Soit x_1, y_1, la solution fondamentale de l'équation de Pell $x^2 - p^3y^2 = 1$. On peut réécrire cette équation pour obtenir $(x_1+1)(x_1-1) = p^3y_1^2$. Si on pose $y_1 = fgh$ (où f, g et h sont trois entiers positifs non nuls), on ne peut factoriser cette expression que de deux manières :

$$x_1 + 1 = fg^2p^3 \text{ et } x_1 - 1 = fh^2$$

et

$$x_1 + 1 = fg^2 \text{ et } x_1 - 1 = fh^2p^3.$$

Il faut donc que l'une des deux équations suivantes ait lieu :

$$-\frac{2}{f} = h^2 - p^3g^2 \text{ ou } \frac{2}{f} = g^2 - p^3h^2.$$

En remarquant que de cette manière f ne pourra prendre que les valeurs 1 et 2, on obtient les quatres combinaisons

$$-1 = h^2 - p^3g^2 \text{ (i)}, \; 1 = g^2 - p^3h^2 \text{ (iii)},$$
$$-2 = h^2 - p^3g^2 \text{ (ii) et } 2 = g^2 - p^3h^2 \text{ (iv)}.$$

Notons tout de suite que la troisième (iii) combinaison n'est pas possible, car cela contredirait le fait que x_1, y_1 est la solution fondamentale de $x^2 - p^3y^2 = 1$.

1) Soit p de la forme $8n + 3$. Selon le théorème 3.14, on sait que l'équation (i) ne peut avoir de solution. La combinaison (iv) ne pourra non plus avoir lieu. En effet, si g, h est une solution de cette équation, alors ils sont de même parité. Dans le cas où ils sont pairs, le second membre est divisible par 4, et dans le cas contraire, le second membre est de la forme $8n+1-(8n+3)(8n+1)$, ou autrement dit $8n - 2$, les deux cas ne pouvant égaler 2. Comme il ne reste que l'équation (ii), il suit que c'est la seule à être possible et qu'elle a donc nécessairement lieu.

2) Soit p de la forme $8n + 7$. En suivant la même démarche qu'au point 1), on déduit rapidement que la quatrième combinaison est la seule possible.

Cela complète donc notre preuve.

Exemple : Le théorème 3.18 nous assure que l'équation diophantienne $x^2 - 27y^2 = -2$ possède des solutions. Maintenant, pour déterminer la solution fondamentale d'une équation de ce genre, on peut utiliser un programme qui parcourt les entiers naturels x jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur entière pour l'expression $\sqrt{\frac{x^2+2}{27}}$. Nous savons en fait qu'il n'y a pas beaucoup d'entiers à parcourir, d'après le théorème 3.17. De cette façon, on trouve la solution fondamentale $x_1 = 5$ et $y_1 = 1$.

On a jugé bon de placer dans des tableaux les solutions fondamentales (lorsqu'elles existent) aux équations de la forme $x^2 - p^3y^2 = \pm 1$ et $\pm\, 2$ pour quelques-uns des premiers nombres premiers p ainsi que pour les nombres puissants consécutifs qui leur sont associés. De cette manière, on pourra obtenir un bref aperçu de l'ordre de grandeur de quelques-uns des types de nombres puissants consécutifs possibles comprenant un carré parfait.

Tableau 8 : Solutions fondamentales aux équations diophantiennes $x^2 - p^3y^2 = 1$ (pour p premier) et nombres puissants consécutifs qui leur sont associés

p	sol. fondamentale (x_1, y_1)	$n = p^3y_1^2$	$n+1 = x_1^2$
2	$(3, 1)$	8	9
3	$(26, 5)$	675	676
5	$(930249, 83204)$	865363202000	865363202001
7	$(130576328, 7050459)$	17050177433963583	17050177433963584

Tableau 9 : Solutions fondamentales aux équations diophantiennes $x^2 - p^3y^2 = -1$ (pour p premier) et nombres puissants consécutifs qui leur sont associés

p	solution fondamentale (x_1, y_1)	$n = x_1^2$ et $n+1 = p^3y_1^2$
2	pas de solution	forme impossible*
3	pas de solution	forme impossible
5	$(682, 61)$	465124 et 465125
7 et 11	pas de solution	forme impossible

* Si x était tel que $x^2 - 8y^2 = -1$, alors il serait impair. Or, dans ce cas, $x^2 + 1$ serait de la forme $4n + 2$, ce qui n'est évidemment pas conforme à $8y^2$.

Tableau 10 : Solutions fondamentales aux équations diophantiennes $x^2 - p^3y^2 = 2$ (pour p premier) et nombres puissants impairs consécutifs qui leur sont associés

p	solution fondamentale (x_1, y_1)	$n = p^3y_1^2$ et $n+2 = x_1^2$
2	pas de solution	forme impossible
3	pas de solution	forme impossible
5	pas de solution	forme impossible
7	$(11427, 617)$	130576327 et 130576329
$11, 13, 17$ et 19	pas de solution	forme impossible

Tableau 11 : Solutions fondamentales aux équations diophantiennes $x^2 - p^3y^2 = -2$ (pour p premier) et nombres puissants impairs consécutifs qui leur sont associés

p	sol. fond. (x_1, y_1)	$n = x_1^2$ et $n+2 = p^3y_1^2$
2	pas de solution	forme impossible
3	$(5, 1)$	25 et 27
5	pas de solution	forme impossible
7	pas de solution	forme impossible
11	$(9980583, 273569)$	99612037019889 et 99612037019891
13 et 17	pas de solution	forme impossible

Par ailleurs, en consultant le tableau 7 au début de la section 3.2, on constate que la cinquième paire de nombres consécutifs et puissants 12167 et 12168 est la seule qui ne résulte pas des solutions d'une équation diophantienne de la forme $x^2 - m^3y^2 = \pm 1$, ces deux nombres étant divisibles respectivement par 23^3 et 2^3. Cette observation nous amène à considérer les équations diophantiennes plus générales $p^3x^2 - q^3y^2 = \pm 1$ ou ± 2, ou encore $x^2 - p^3q^3y^2 = \pm 1$ ou ± 2. Encore une fois, nous utiliserons des résultats déjà démontrés dans Legendre [13], dans ces cas pour des équations de la forme $px^2 - qy^2 = \pm 1$ ou ± 2 et $x^2 - pqy^2 = \pm 1$ ou ± 2, avec p et q premiers. Par contre, afin d'alléger le texte, nous ne donnerons pas de démonstration à ces résultats. Les démarches utilisées par Legendre étant bonnes comme précédemment lorsque nous remplaçons p par p^3 et q par q^3, il ne nous semble pas nécessaire de les recopier ici.

THÉORÈME 3.19 (Legendre [13]) : Si $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$, alors l'équation diophantienne $p^3x^2 - q^3y^2 = \pm 1$ possèdera toujours des solutions en choisissant convenablement le signe du second membre. De plus, les équations suivantes n'auront jamais de solution :

$$p^3x^2 - q^3y^2 = \pm 2 \text{ , } x^2 - p^3q^3y^2 = \pm 2$$

$$\text{et } x^2 - p^3q^3y^2 = -1.$$

THÉORÈME 3.20 (Legendre [13]) : Si $p \equiv q \equiv 1 \pmod 4$, alors on pourra toujours satisfaire à l'une des trois équations :

$$x^2 - p^3q^3y^2 = -1 \text{ , } p^3x^2 - q^3y^2 = \pm 1,$$

en choisissant convenablement le signe du second membre. De plus, les équations suivantes n'auront pas de solution :

$$p^3x^2 - q^3y^2 = \pm 2 \ , \ x^2 - p^3q^3y^2 = \pm 2.$$

De manière encore plus générale, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.21 (Legendre [13]) : Si p et q sont des nombres premiers de la forme $4n + 3$, et si r est un nombre premier de la forme $4n + 1$, alors il y aura toujours une de ces six équations qui sera résoluble :

$$\begin{aligned} p^3x^2 - q^3r^3y^2 &= \pm 1 \\ q^3x^2 - p^3r^3y^2 &= \pm 1 \\ r^3x^2 - p^3q^3y^2 &= \pm 1. \end{aligned}$$

Exemple : Prenons le cas $p = 3$ et $q = 7$, c'est-à-dire deux nombres premiers de la forme $4n + 3$. D'après le théorème 3.19, on doit en premier lieu déterminer le signe du second membre de l'équation $27x^2 - 343y^2 = \pm 1$. On remarque aisément que y ne peut être un multiple de 3, donc que y^2 est nécessairement de la forme $3n + 1$. De ce fait, il suit que $343y^2 - 1$ est toujours un multiple de 3, tandis que ce n'est jamais le cas pour $343y^2 + 1$. On travaillera donc sur l'équation $27x^2 - 343y^2 = -1$. Maintenant, en remarquant que le terme $27x^2 + 1$ se divisera par 343 lorsque nous aurons une solution, nous allons regarder les différentes formes possibles pour ce dernier par rapport à 343. En considérant tous les cas possibles, on constate qu'il n'y a que deux types de nombres qui sont susceptibles de mener à des solutions, soit ceux qui sont congrus à 34 ou à 309 modulo 343. Finalement, avec l'ordinateur, on peut utiliser une boucle qui effectue le calcul de l'expression $\sqrt{\frac{27x^2+1}{343}}$ jusqu'à ce qu'elle soit un nombre entier. C'est en fait de cette façon que nous avons pu obtenir la solution fondamentale

$$x = 1342879 = 139 \cdot 9661, \ y = 376766 = 2 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 337,$$

et par le fait même les deux nombres puissants consécutifs

$$27x^2 = 3^3 \cdot 139^2 \cdot 9661^2 \text{ et } 343y^2 = 2^2 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 43^2 \cdot 337^2.$$

Contrairement aux équations diophantiennes de la forme $x^2 - p^3y^2 = \pm 2$, on ne dispose pas de résultats aussi directs pour les équations du genre $p^3x^2 - q^3y^2 = \pm 2$. Néanmoins, le théorème 3.22 peut nous guider pour trouver des nombres impairs consécutifs et puissants de la forme p^3n^2 et q^3m^2.

THÉORÈME 3.22 (Legendre [13]) : Si D est un nombre entier qui n'est pas un carré parfait, alors il existe toujours des facteurs M et N de D tels que $D = MN$ et tels que l'une des deux équations diophantiennes

$$Mx^2 - Ny^2 = \pm 1 \text{ et } Mx^2 - Ny^2 = \pm 2$$

possède des solutions, en choisissant convenablement le signe du second membre.

REMARQUE : Si une équation diophantienne de la forme $p^3x^2 - q^3y^2 = \pm 2$ possède des solutions, alors on a vu que les nombres premiers p et q ne peuvent être tous les deux congrus à 1 modulo 4, ou encore tous les deux congrus à 3 modulo 4, car dans ces deux cas, l'expression $p^3x^2 - q^3y^2$ serait divisible par 4. Les seuls cas possibles surviennent donc lorsque p et q ne satisfont pas la même congruence par rapport à 4.

Exemple : $27x^2 - 125y^2 = \pm 2$.

Déterminons dans un premier temps le signe du second membre. Ici y ne peut prendre que deux formes, soit $3n + 1$ et $3n + 2$, et donc y^2 qu'une seule, soit $3n+1$. On a donc $27x^2 = 125y^2 + 2$ de la forme $3n+1$, mais cela contredit le fait que $27x^2$ est de la forme $3n$. C'est donc le signe négatif qu'il faut choisir. D'ailleurs, en vérifiant, on obtient la forme $3n$ pour $125y^2 - 2$.

De manière à simplifier notre problème, regardons quelle forme peut prendre x. La manière la plus judicieuse est de s'attarder aux différentes congruences de x par rapport à 125, puisque de cette façon, on est en mesure d'éliminer toutes celles qui font en sorte que l'expression $27x^2 + 2$ n'est pas congrue à 0 modulo 125. Après quelques calculs, on n'obtient que deux formes possibles pour x, c'est-à-dire $125n + 107$ et $125n + 18$. De plus, étant donné que x doit être impair, on en déduit que ces deux formes peuvent se ramener aux deux types suivants : $250n+143$ et $250n+107$. Il ne reste plus qu'à utiliser un programme qui parcourt les nombres de ces deux formes jusqu'à ce que $\sqrt{\frac{27x^2+2}{125}}$ soit un entier. À l'aide d'un tel programme, on a déterminé la solution fondamentale

$$x_1 = 715893 = 3 \cdot 71 \cdot 3361 \text{ et } y_1 = 332717 = 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 149,$$

de sorte que les nombres

$$27x^2 = 3^5 \cdot 71^2 \cdot 3361^2 \text{ et } 125y^2 = 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 29^2 \cdot 149^2$$

sont deux nombres impairs à la fois consécutifs et puissants.

L'exemple présenté ci-dessus constitue la dernière démarche de résolution d'équations diophantiennes que nous donnons dans le présent document. De plus, nous avons aussi décidé de mettre un terme à la théorie concernant la résolution d'équations diophantiennes du second degré, puisque nous disposons de tout ce qu'il faut pour émettre les résultats escomptés. Bien entendu, les différents types d'équations diophantiennes vus précédemment constituent des exemples particuliers de celles de la forme plus générale $ax^2+by^2 = c$, et sachant qu'un nombre puissant peut toujours s'écrire sous la forme m^2r^3, il est clair que l'étude complète des nombres puissants consécutifs est directement dépendante de la résolution de ces équations. Or, il a été démontré par Matiyasevich (1970) que le dixième problème de Hilbert n'est pas résoluble, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune méthode générale permettant de dire qu'une équation diophantienne donnée possède des solutions ou non (pour références à ce sujet voir Itô [12]), ce qui explique aussi notre choix de mettre un terme à notre étude. Cela étant dit, nous donnons pour conclure ce thème un résultat très général qui complète les précédents et qui nous permettra ensuite de conclure sur les nombres puissants consécutifs.

THÉORÈME 3.23 (Dickson [8]) : Si l'équation diophantienne $mx^2 - ny^2 = k$ possède une solution $x = a$ et $y = b$, alors elle a une infinité de solutions.

Remarques :

1) Une fois que nous avons une solution $x = a$ et $y = b$ pour $mx^2 - ny^2 = k$, il suffit de considérer la solution fondamentale de l'équation de Pell $x^2-mny^2 = 1$, disons $x = p$ et $y = q$, et de trouver les nombres x et y tels que

$$x\sqrt{m} \pm y\sqrt{n} = (a\sqrt{m} \pm b\sqrt{n})(p \pm q\sqrt{mn})^k$$

pour $k = 2, 3, 4, ...$, afin de trouver une infinité de solutions.

2) Il est possible de déterminer le minimum que peut prendre mx^2-ny^2 en trouvant la fraction x/y donnant la meilleure approximation de $\sqrt{n/m}$. Pour cela, il faut utiliser en particulier le développement de $\sqrt{n/m}$ en fraction continue (voir Dickson [8]).

3) En étudiant les équations diophantiennes de la forme $ax^2 + by^2 = c$ pour des entiers c composés, Euler remarqua l'identité suivante :

$(a\alpha p^2+b\beta p^2)(abr^2+\alpha\beta s^2) = \alpha b(apr\pm\beta qs)^2+a\beta(\alpha ps\mp bqr)^2$ (voir Dickson [8]).

Ayant déjà trouvé plusieurs exemples de nombres puissants impairs de la forme $(n, n+2)$, il nous est donc possible de statuer sur l'existence d'une infinité de tels couples de nombres par l'entremise du théorème 3.23.

THÉORÈME 3.24 : Il existe une infinité de couples de nombres puissants impairs de la forme $\{n, n+2\}$.

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes contentés d'établir qu'il existe une infinité de nombres puissants consécutifs de la forme $(n, n+1)$ de même que de la forme $(n, n+2)$, dans le dernier cas des nombres puissants impairs consécutifs. Avec le théorème 3.23, on peut maintenant regarder s'il existe une infinité de couples de nombres puissants ayant comme différence 3 ou tout autre nombre entier positif. En effet, avec ce résultat, il nous suffit de trouver deux nombres puissants dont la différence est k pour conclure qu'il y en a une infinité. Nous avons fait la recherche pour $3 \leq k \leq 13$, et la réponse s'est révélée positive dans chaque cas (voir tableau 12). En fait, nous savons déjà, grâce aux mathématiciens Mollin et Walsh, que c'est la cas pour chaque entier non nul k. En effet, ces derniers ont exhibé un algorithme permettant d'écrire tout entier positif k comme une différence de deux nombres puissants qui ne sont pas des carrés parfaits et qui sont relativement premiers deux à deux, et ce, d'un nombre infini de façons différentes (voir Mollin et Walsh [16]).

Tableau 12 : Plus petits couples de nombres puissants de la forme $\{n, n+k\}$, pour $1 \leq k \leq 13$

k	n	$n+k$
1	$8 = 2^3$	$9 = 3^2$
2	$25 = 5^2$	$27 = 3^3$
3	$125 = 5^3$	$128 = 2^7$
4	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$
5	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$
6	$214369 = 463^2$	$214375 = 5^4 \cdot 7^3$
7	$9 = 3^2$	$16 = 2^4$
8	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$
9	$16 = 2^4$	$25 = 5^2$
10	$2187 = 3^7$	$2197 = 13^3$
11	$16 = 2^4$	$27 = 3^3$
12	$4 = 2^2$	$16 = 2^4$
13	$36 = 2^2 \cdot 3^3$	$49 = 7^2$

3.5 Nombres puissants compris entre deux carrés parfaits consécutifs

Au chapitre 2, nous avons vu que l'écart entre deux nombres abondants consécutifs ne pouvait être plus grand que 6. Qu'en est-il des nombres puissants ? Si on désigne par (a_k) la suite des nombres puissants, on peut affirmer par l'entremise de ce que nous avons vu à la fin de la dernière section que pour tout entier positif n, $a_{k+1} - a_k = n$ pour une infinité de nombres k. Le tableau 12 nous donne aussi des exemples d'écarts entre deux nombres puissants. Recherchons maintenant une borne supérieure pour $a_{k+1} - a_k$. Prenons donc pour commencer un nombre puissant n quelconque. Comme tout entier positif, n est compris entre deux carrés parfaits consécutifs. Ainsi, soit N le seul entier positif tel que

$$N^2 \leq n < (N+1)^2.$$

Attardons-nous au premier nombre puissant supérieur à n. Si on note ce nombre n^+, alors on peut établir la relation suivante :

$$n^+ - n \leq (N+1)^2 - N^2 = 2N + 1 \leq 2\sqrt{n} + 1.$$

De plus, c'est la plus petite majoration possible, compte tenu du fait que la borne supérieure $2\sqrt{n} + 1$ peut être atteinte dans certains cas. En fait, cette situation se produit lorsque n et n^+ sont deux carrés parfaits consécutifs pour lesquels l'intervalle $[n, n^+]$ ne contient aucun autre nombre puissant. On peut citer en exemple les nombres puissants consécutifs 9 et 16, de même que les grands nombres 10^{10} et 10000200001. À titre d'exemple, les écarts entre les nombres $n = 10^k$ pour les entiers k allant de 2 à 11 et les nombres puissants n^+ correspondants sont donnés dans le tableau qui suit.

Tableau 13 : Exemples d'écarts entre deux nombres puissants consécutifs

n	n^+	$n^+ - n$	$[2\sqrt{n}+1]$
9	$16 = 2^4$	7	7
10^2	$108 = 2^2 \cdot 3^3$	8	21
10^3	$1024 = 2^{10}$	24	64
10^4	$10125 = 3^4 \cdot 5^3$	125	201
10^5	$100352 = 2^{11} \cdot 7^2$	352	633
10^6	$1000188 = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7^3$	188	2001
10^7	$10004569 = 3163^2$	4569	6325
10^8	$100018800 = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^3$	18800	20001
10^9	$1000014129 = 3^2 \cdot 83^2 \cdot 127^2$	14129	63246
10^{10}	$10000200001 = 11^2 \cdot 9091^2$	200001	200001
10^{11}	$100000147984 = 2^4 \cdot 11^2 \cdot 7187^2$	147984	632456

Par ailleurs, au sujet de la présence de nombres puissants dans des intervalles compris entre deux carrés parfaits consécutifs, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3.25 : Il existe une infinité de nombres entiers n tels que l'intervalle $]n^2, (n+1)^2[$ admet au moins deux nombres puissants.

DÉMONSTRATION : Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang n_0, chaque intervalle de la forme $]n^2, (n+1)^2[$ avec $n \geq n_0$ contient au plus un nombre puissant. Pour $x > n_0$, on aura alors que

$$P(x) - P(n_0^2 - 1) \leq \sum_{n_0 \leq n^2 \leq x} \sum_{\substack{m \text{ puissant} \\ n^2 \leq m < (n+1)^2}} 1 \leq \sum_{n_0 \leq n^2 \leq x} 2 \leq 2 \sum_{n^2 \leq x} 1 \leq 2\sqrt{x},$$

ce qui contredit le fait que $P(x) > 2.16\sqrt{x}$ si x est suffisamment grand (Théorème 3.2).

Il existe aussi des intervalles compris entre deux carrés parfaits qui contiennent plus de deux nombres puissants. En ce sens, si on définit pour chaque entier positif k le nombre n_k comme étant le plus petit nombre tel que l'intervalle $]n_k^2, (n_k+1)^2[$ contient k nombres puissants, on a alors le tableau suivant :

Tableau 14 : Les nombres puissants dans l'intervalle $[n_k^2, (n_k+1)^2]$

k	n_k	Les nombres puissants dans l'intervalle $[n_k^2, (n_k+1)^2]$
1	2	$4, 8, 9$
2	5	$25, 27, 32, 36$
3	31	$961, 968, 972, 1000, 1024$
4	234	$54756, 54872, 54925, 55112, 55125, 55225$
5	1822	$3319684, 3319756, 3321125, 3321188,$
		$3321216, 3322336, 3323329$
6	3611	$13039321, 13041125, 13041675, 13042575,$
		$13043800, 13045131, 13045832, 13046544$

Chapitre 4 : Conjectures relatives aux nombres puissants consécutifs

4.1 Suites de plus de 2 nombres puissants consécutifs

Nous avons établi au chapitre précédent qu'il existe une infinité d'entiers consécutifs $n, n+1$ qui sont puissants. Comme pour les nombres abondants, il est naturel de se demander s'il existe des suites de nombres puissants de la forme $n, n+1, ..., n+k$ pour chaque entier $k \geq 1$. Nous pouvons cependant dire d'emblée que le travail dans ce sens sera considérablement réduit, compte tenu du fait que deux nombres pairs consécutifs ne peuvent pas être tous les deux puissants. En effet, on a déjà fait remarquer que dans le cas contraire, il existerait deux nombres entiers consécutifs $n, n+2$ tous deux multiples de 4, ce qui est évidemment impossible. Dès lors, nous pouvons affirmer qu'il est possible de trouver au plus trois nombres consécutifs qui soient puissants, le plus petit de ces trois nombres devant être impair.

À première vue, il pourrait être tentant d'utiliser sensiblement la même démarche qu'à la section précédente pour tenter de trouver des suites de la forme $n, n+1, n+2$ de nombres puissants consécutifs. En ce sens, il serait naturel de chercher une bonne combinaison d'équations diophantiennes pour lesquelles nous aurions par exemple une infinité de solutions x, y et z nous permettant d'obtenir des nombres puissants n, $n+1$ et $n+2$. Cependant, compte tenu de ce que nous savons au sujet des triplets d'entiers puissants consécutifs, il serait très surprenant que cette entreprise produise des résultats positifs. Pour commencer, nous ne connaissons même pas de triplet de nombres consécutifs qui soient puissants. Aussi, pour appuyer nos propos, il sera question dans la présente section ainsi que dans la suivante de quelques conjectures et théorèmes portant sur les nombres puissants en lien direct avec une importante conjecture énoncée en 1985 par Masser et Oesterlé, soit la *conjecture abc*.

Il existe une foule de conjectures fameuses en théorie des nombres qui peuvent être démontrées en supposant tout simplement que la *conjecture abc* est vraie. Par exemple, le grand théorème de Fermat peut être démontré en moins d'une page si cette conjecture est vraie. L'objet de ce chapitre n'étant pas de donner une idée de la portée générale de la *conjecture abc*, mais bien de nous restreindre aux résultats et conjectures qui en découlent au sujet des nombres puissants consécutifs, nous nous contenterons d'énoncer la *conjecture abc* sans en faire une analyse plus approfondie.

Conjecture abc (De Koninck [4]) : Soit $\epsilon > 0$. Il existe une constante $k = k(\epsilon) > 0$ telle que, pour tout triplet d'entiers (a, b, c) premiers deux à deux et satisfaisant l'équation $a + b = c$ de même que la condition $0 < a < b < c$, on ait

$$c < k\left(\prod_{p|abc} p\right)^{1+\epsilon},$$

où le produit est pris sur tous les diviseurs premiers p de abc.

Revenons maintenant aux nombres puissants consécutifs. Le mathématicien Erdös a été le premier à émettre la conjecture suivante :

Il n'existe aucun nombre entier k tel que $4k-1, 4k$ et $4k+1$ sont puissants.

Jusqu'à présent, personne n'a pu contredire cette dernière affirmation. Nous attendons tout de même encore une démonstration. De plus, si la *conjecture abc* est vraie, il serait très surprenant que l'énoncé de Erdös soit faux, compte tenu du prochain théorème.

THÉORÈME 4.1 (De Koninck [4]) : Si la *conjecture abc* est vraie, il ne peut exister qu'un nombre fini de triplets de nombres puissants consécutifs.

En considérant ces résultats et l'absence d'indication nous laissant croire que la *conjecture abc* pourrait être fausse, il semble donc futile de croire qu'il peut exister des suites de nombres puissants consécutifs plus grandes que 2.

Revenons maintenant aux suites de nombres puissants consécutifs, en considérant rapidement dans un premier temps les suites de deux nombres impairs consécutifs et puissants. Rappelons que ces suites peuvent être très intéressantes, puisqu'elles constituent une condition nécessaire à l'existence de triplets d'entiers consécutifs et puissants. En recherchant les suites du genre à l'aide d'un logiciel de calcul, on ne trouve que deux résultats inférieurs à 10^7, soit $25 = 5^2, 27 = 3^3$ et $70225 = 5^2 \cdot 53^2, 70227 = 3^5 \cdot 17^2$. La rareté de ces suites vient donc réduire encore plus la probabilité qu'il existe des triplets de nombres consécutifs et puissants. Cependant, nous avons vu comment trouver une infinité de couple de nombres puissants impairs et consécutifs, en utilisant des équations diophantiennes de la forme $p^3x^2 - q^3y^2 = \pm 2$, et il se pourrait donc qu'il existe un nombre puissant pair situé entre de très grands nombres p^3x^2 et q^3y^2, du moins personne n'a encore réussi à prouver le contraire. Dans le même ordre d'idées, Mollin et Walsh [15] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe trois nombres puissants consécutifs en démontrant que les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe trois nombres puissants consécutifs.

(2) Il existe deux nombres puissants n et m, où n est pair et m est impair, tels que $n^2 - m = 1$.

(3) Il existe un entier positif D libre de carrés tel que $D \equiv 7 \pmod 8$, où x_1, y_1 est la solution fondamentale de $x^2 - Dy^2 = 1$ et où, pour un certain entier n, x_n est un nombre puissant pair et y_n est un nombre entier impair multiple de D, avec $(x_1 + \sqrt{D}y_1)^n = x_n + \sqrt{D}y_n$.

Remarque : La conjecture affirmant qu'il n'existe pas de triplet de nombres puissants consécutifs implique qu'il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont pas des nombres premiers de Wieferich. (Voir Vardi [20].)

4.2 Autres résultats et conjectures sur les nombres puissants.

En guise de conclusion à ce que nous avons vu dans ce chapitre, nous donnons dans la présente section des conjectures et des résultats relatifs aux différents résultats obtenus et cités à propos des nombres puissants dans ce document.

Revenons dans un premier temps aux nombres puissants consécutifs, ou plus précisément aux écarts entre deux nombres puissants consécutifs. À ce sujet, nous avons entre autres mentionné que si n^+ représente le plus petit nombre puissant supérieur à n, alors $n^+ - n \leq 2\sqrt{n} + 1$. Dans le même ordre d'idées, la prochaine conjecture avance un résultat qui dépend encore une fois de la *conjecture abc* et qui concerne les nombres puissants $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$

CONJECTURE A [12] (De Koninck [4]) : Pour tout entier $k \geq 2$, si on note n_k comme étant le nombre puissant le plus proche de 2^k avec $n_k \neq 2^k$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} |2^k - n_k| = +\infty.$$

Avant de poursuivre, notons que les nombres $|2^k - n_k|$, pour $3 \leq k \leq 35$, sont dans l'ordre 1, 7, 4, 8, 3, 13, 12, 24, 23, 96, 89, 184, 7, 317, 28, 56, 112, 224, 448, 896, 1792, 3584, 4417, 10489, 5503, 17413, 22012, 44024, 4633, 76675, 18532, 14139 et 74128.

En fait, nous savons que la *conjecture abc* implique la conjecture A :

THÉORÈME 4.2 (De Koninck [4]) : Si la *conjecture abc* est vraie, alors

$$\lim_{k \to +\infty} |2^k - n_k| = +\infty.$$

REMARQUE : La conjecture A est liée de très près aux nombres de Fermat $2^{2^n} + 1$ et aux nombres de Mersenne $2^n - 1$ (Voir De Koninck [4]).

Voici une conjecture en relation avec les nombres k-puissants (voir définition 3.12 au début de la section 3.4) :

CONJECTURE B (Erdös) (De Koninck [4]) : L'équation $x + y = z$ n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers 4-puissants x, y et z premiers entre eux.

THÉORÈME 4.3 (De Koninck [4]) : La conjecture *abc* implique la conjecture B.

En conclusion de ce travail, nous énonçons une nouvelle conjecture :

CONJECTURE C : Pour tout entier positif k, il existe un entier positif n tel que l'intervalle $]n^2, (n+1)^2[$ contient k nombres puissants.

Bibliographie

[1] W. W. ADAMS et L. J. GOLDSTEIN, *Introduction to Number Theory*, Prentice–Hall, New–Jersey, 1976.

[2] D. M. BURTON, *Elementary Number Theory*, Ally & Bacon, Boston, 1975.

[3] T. DANTZIG, *Number the Language of Science*, 4e éd., Macmillan, 1965.

[4] J.–M. DE KONINCK, *Théorie analytique des nombres*, Université Laval, Québec, 1998.

[5] J.–M. DE KONINCK et A. MERCIER, *Introduction à la théorie des nombres*, Modulo, Mont–Royal (Québec), 1994.

[6] M. DELÉGLISE, *Bounds for the Density of Abundant Integers*, Exp. Math. 7, pp. 137–143, 1998.

[7] L. E. DICKSON, *History of the Theory of Number*, vol. 1, Chelsea, New York, 1952.

[8] L. E. DICKSON, *History of the Theory of Number*, vol. 2, Chelsea, New York, 1952.

[9] P. D. T. A. ELLIOT, *Probalistic Number Theory*, vol. 1, Springer–Verlag, 1979.

[10] P. ERDÖS, *On the Density of Abundant Numbers*, J. London Math. Soc. 9, pp. 278–282, 1934.

[11] R. K. GUY, *Unsolved Problems in Number Theory*, 2e éd., Springer–Verlag, New York, 1994.

[12] K. ITÔ, (Éd.), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, 2e éd., vol. 1, MIT Press, Cambridge, 1987.

[13] A.–M. LEGENDRE, *Théorie des nombres*, tome 1, Librairie scientifique et technique, Albert Blanchard, Paris, 1955.

[14] W. J. LEVEQUE, *Topics in Number Theory*, vol. 1, Addison–Wesley, Reading, 1956.

[15] R. A. MOLLIN et P. G. WALSH, *A Note on Powerfull Numbers, Quadratic*

Fields and the Pellian, C. R. Math. Rep. Acad. Sc. Canada 8, pp. 109–114, 1986.

[16] R. A. MOLLIN et P. G. WALSH, *On Nonsquare powerful numbers*, Fib. Quart. 25, pp. 34–37, 1987.

[17] T. NAGELL, *Introduction to Number Theory*, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1951.

[18] O. ORE, *Number Theory and its History*, McGraw–Hill, 1948.

[19] J. E. SHOCKLEY, *Introduction to Number Theory*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1967.

[20] I. VARDI, *Computational Recreations in Mathematics*, Addison–Wesley, Reading, 1991.

[21] C. R. WALL, *Density Bounds for the Sum of Divisors Function*, The Theory of Arithmetic Functions : Proceedings of the Conference at Western Michigan University, April 29–May 1, 1971. (Ed. A. A. Gioia and D. L. Goldsmith). Sringer–Verlag, New York, pp. 283–287, 1971.

[22] C. R. WALL., P. L. CREWS et D. B. JOHNSON, *Density Bounds for the Sum of Divisors Function*, Math. Comput. 31, p. 616, 1977.